ALLENAMENTO GARA A SQUADRE ON-LINE (19/12/2011)

1. THE CANDY MAN [30]
Sia n il numero cercato.
L'equazione che risolve il problema è:

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{(n+2)(n+3)}{2}+\frac{(n+3)(n+4)}{2}=2050$$
$$(n+1)^2+(n+3)^2=2050$$
$$2n^2+8n+10=2050$$
$$n^2+4n-1020=0$$

La cui unica soluzione accettabile è $n=30$.

2. IL PRIMO BIGLIETTO DORATO [5221]
Da 4 cifre vi è il solo 1991.
Da 3 cifre ci sono 929, 848, 767 e 686.
Da due cifre non ve ne sono.

3. GIOCHI DI CIOCCOLATO [2375]
La strategia vincente è quella di lasciare al nonno un quadrato e rispondere alla mossa del nonno rendendo sempre il pezzo rimasto un quadrato.
Per lasciare un quadrato di 125×125 quadretti Charlie avrebbe dovuto spezzare un rettangolo di $(144-125)\cdot125=2375$ quadretti.

4. IL SECONDO BIGLIETTO DORATO [100]
Per ogni $n\geq3$ il numero dato è formato da 12 interi consecutivi, di cui almeno 2 sono multipli di 5.
Tutti i numeri avranno almeno 2 zeri. La potenza di 10 richiesta è 100.

5. I "SILVER TICKET" [7999]
Osserviamo che nel numero $n=abcde$, scelte le prime 4 cifre $abcd$, la quinta cifra e, che rende congruo a 0 modulo 5 la somma $a+b+c+d+e$ può essere scelto in 2 modi distinti.
Ad esempio: $1234x$, $x=0$ oppure $x=5$.
L'unico caso in cui un solo valore è possibile è quando le prime 4 cifre sono tutte zero, in questo caso, non essendo permesso il numero 00000, solo 5 completa la richiesta.
Vi sono dunque 2 valori per ogni decina, tranne che la prima, quindi vi sono $4000\cdot2-1=7999$ possibilità.

6. PREPARATIVI [6305]
Cerchiamo il primo numero triangolare che supera 2011:

$\frac{n(n+1)}{2}\geq2011$, per $n=63$ si ottiene 2016.
Per completare il 63° strato sono necessarie ancora 5 ciliegie.

7. IL TERZO BIGLIETTO DORATO [484]
Sia ab il numero cercato. La condizione richiesta è $10a+b+10b+a=k^2$, da cui segue che $11(a+b)=k^2$. Ora l'unico possibile quadrato è 11^2, quindi $a+b=11$, che ci da come possibili numeri solamente 92, 83, 74, 65, 56, 47, 38 e 29.

8. IL QUARTO BIGLIETTO DORATO [122]
k deve essere il prodotto di due numeri primi la cui somma è 63 che essendo dispari ci dà una sola possibilità: $2+61$. $k = 61 \cdot 2 = 122$.

9. NONSOLOCIOCCOLATO [200]
Siano p il prezzo del pane, n il prezzo della crema alla nocciola e g il prezzo della crema al gianduia, prima degli aumenti, e di conseguenza $p+n+g$ il prezzo del panino.

Dai dati del problema possiamo scrivere che

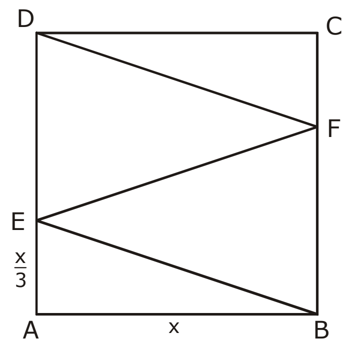
$$\frac{105}{100}p + \frac{120}{100}g = \frac{105}{100}p + \frac{126}{100}n + \frac{120}{100} \cdot \frac{85}{100}g$$
$$\frac{105}{100}p + \frac{120}{100}g = p+n+g+10 \text{ centesimi}$$

Semplificando la prima equazione si scopre che $g = 7n$, che inserita nella seconda ci porta a scoprire che $p = 200 - 8n$

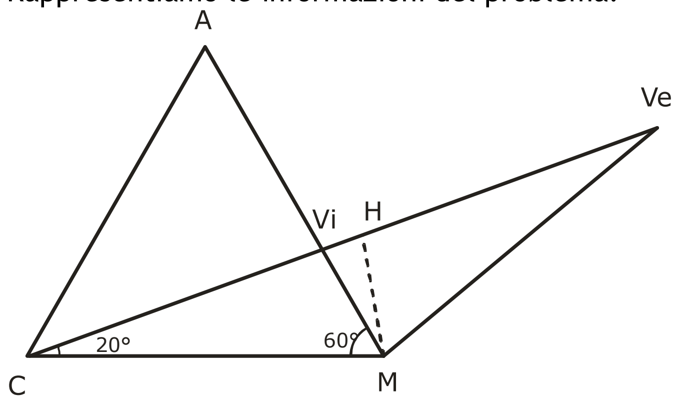
Il prezzo iniziale è quindi $p+n+g = 200 - 8n + n + 7n = 200$ centesimi

10. IL BIGLIETTO DI CHARLIE [810]
La condizione data equivale a $AE = \frac{1}{3}AB$.
Detto x il lato del quadrato, applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABE si ottiene:

$$x^2 + \frac{1}{9}x^2 = 30^2 \qquad \frac{10}{9}x^2 = 900 \qquad x^2 = 810 \text{ cm}^2$$



11. IL GRAN GIORNO [20]
Rappresentiamo le informazioni del problema.



Costruisco il segmento MH in modo che l'angolo $Vi\hat{M}H = 20°$.
Il triangolo $ViMH$ risulta essere isoscele per costruzione, infatti gli angoli alla sua base sono entrambi di $80°$ ($\overline{MVi} = \overline{MH}$), così come pure il triangolo CHM ($\overline{CH} = \overline{CM}$).
I due triangoli $CMVi$ e $MHVe$ risultano essere congruenti, infatti hanno $\overline{CVi} = \overline{HVe}$ per differenza di segmenti congruenti, $\overline{MVi} = \overline{MH}$ e $C\hat{V}iM = M\hat{H}Ve$.

L'angolo $M\hat{V}eVi = 20°$.

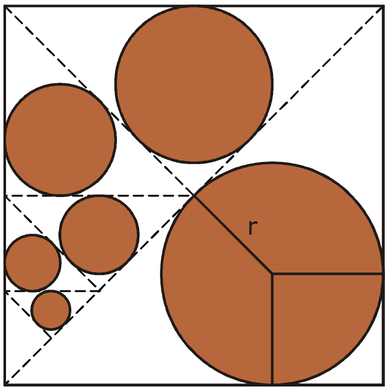
12. GLI UMPA LUMPA [1003]
Sia y il numero di Umpa Lumpa che lavorano per Willy Wonka e x il numero di coloro che si occupano del mescolamento del cioccolato.

Deve essere $\frac{333}{1000} < \frac{x}{y} < \frac{1}{3}$,
cioè $333y < 1000x$ e $3x < y$.

Deve essere almeno $y = 3x + 1$, quindi $999x + 333 < 1000x$, cioè $x > 333$.

Allora almeno $x = 334$ e $y = 1003$.

13. GOCCE DI CIOCCOLATO [53]



Osserviamo bene la figura: il quadrato è diviso in tanti triangoli rettangoli isosceli circoscritti ai cerchi. Solo un triangolino non ha il relativo cerchio.
Sia p la percentuale di area occupata da un cerchio rispetto al relativo triangolo.

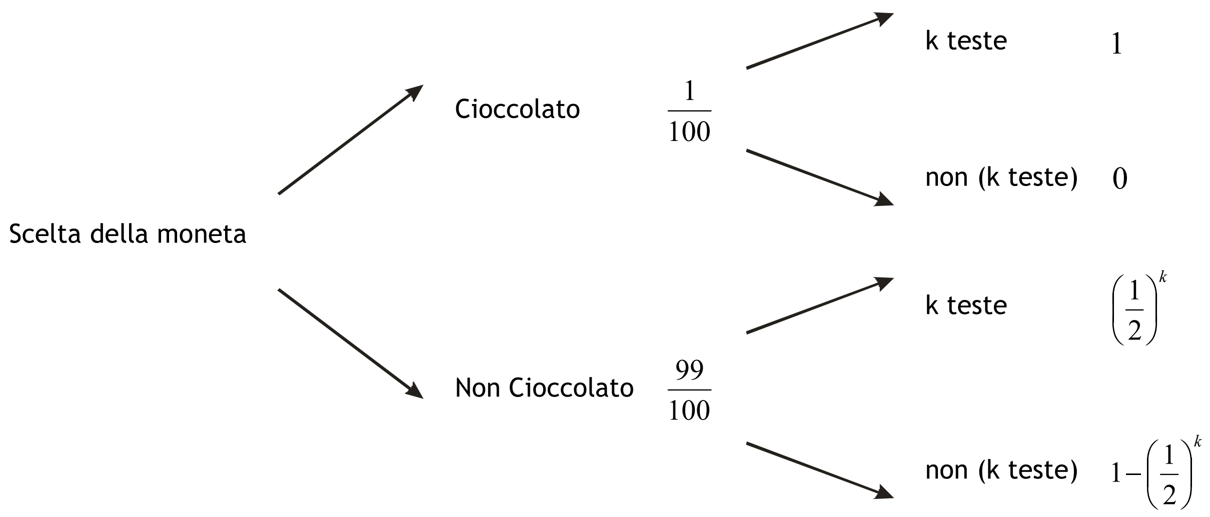
La percentuale totale richiesta sarà $P = \frac{63}{64}p$ in quanto solo $\frac{1}{64}$ della superficie non è ricoperta dai cerchi, e la restante parte è divisa in parti simili tra loro.

Calcoliamo p, osservando che, detto l il cateto del triangolo rettangolo, il raggio r verifica $r + r\sqrt{2} = \frac{l}{2}\sqrt{2}$ da cui segue che $r = \frac{l}{2}(2-\sqrt{2})$

$$p = \frac{\pi r^2}{\frac{l^2}{2}} = \frac{\pi \frac{l^2}{4}(6-4\sqrt{2})}{\frac{l^2}{2}} = \pi(3-2\sqrt{2})$$

$P = \frac{63}{64}\pi(3-2\sqrt{2}) \cong 0{,}5306$ pari al 53%

14. MONETE DI CIOCCOLATO [10]
Schematizziamo la situazione:



Cerco la probabilità che la monete sia di cioccolato sapendo che sono uscite k teste (probabilità condizionata)

$$P(ciocc \mid k-teste)=\frac{P(ciocc)\cdot P(k-teste \mid ciocc)}{P(k-teste)}=\frac{\frac{1}{100}\cdot 1}{\frac{1}{100}\cdot 1+\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{2^k}}=\frac{2^k}{2^k+99}$$

Ora si vuole che questa probabilità sia maggiore del 90% quindi: $\frac{2^k}{2^k+99}>\frac{90}{100}$;

$100\cdot 2^k > 90\cdot 2^k + 90\cdot 99$
$10\cdot 2^k > 90\cdot 99$
$2^k > 891$.

È sufficiente che k valga 10.

15. AUGUSTUS IL GOLOSO [3824]
Dobbiamo determinare tutti i diversi rettangoli di dimensioni b e h tali che $b\cdot h = 2310$.
Se scomponiamo in fattori 2310 scopriamo che $2310 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$.
Il problema è quindi equivalente a cercare il doppio della somma di tutti i divisori di 2310.

Affrontiamo il problema algebricamente.

Se $n = a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e$ con a, b, c, d ed e numeri primi distinti, la somma cercata è

$$2(abcde+abcd+abce+acde+bcde+abc+abd+...+a+b+c+d+e+1)=$$
$$2(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)$$

Nel nostro caso:
$2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 12 = 3824$

16. LA SEZIONE DELLE INVENZIONI [997]
Indicando con x il numero dei "SucchiaSucchiaCheMaiSiConsuma" e con y il numero delle gomme il problema si traduce con l'equazione: $\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}+2$ con $y>x$.
Semplifichiamo l'equazione:
$x+y=2\sqrt{xy}+4$
$x-2\sqrt{xy}+y=4$
$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=4$

Ora sapendo che $y>x$

$\sqrt{y}-\sqrt{x}=2$.
Il più grande valore possibile per $\sqrt{y}$ è $10^3-1=999$ e in tal caso $\sqrt{x}=997$.
Procedendo in questa maniera avrò in tutto 997 possibili coppie $\left(\sqrt{x};\sqrt{y}\right)$ e conseguentemente 997 coppie $(x;y)$.

17. CIOCCOLATO NOCCIOLATO [981]
Tutti i termini della successione 1, 3, 4, 9, … sono somme di diverse potenze di tre e si possono rappresentare in base 3 usando solo le cifre 0 e 1.

Ora, dato che $100=(1100100)_2$, il centesimo termine sarà
$(1100100)_3=9+243+729=981$.

18. TAVOLETTE GIGANTI [3024]
Riscriviamo la condizione sfruttando la notazione posizionale:

$k=(10a+b)(10c+d)=(10b+a)(10d+c)$

da cui si ottiene, eseguendo i calcoli sulla seconda uguaglianza:

$99(ac-bd)=0$

Cerchiamo ora le quaterne di cifre diverse, tali che $ac-bd=0$

Le quaterne (a,b,c,d) che soddisfano la condizione richiesta sono:

$(1,2,6,3)$ $k=756$

$(2,8,4,1)$ $k=1148$

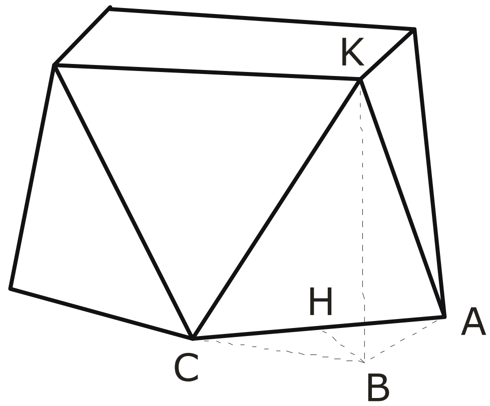
$(3,6,4,2)$ $k=1512$

$(9,6,2,3)$ $k=2208$

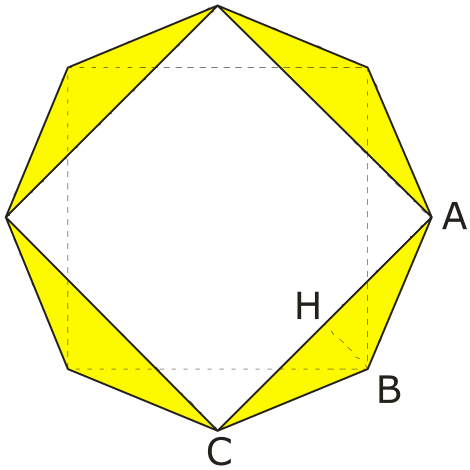
$(4,8,6,3)$ $k=3024$ che è il valore più grande possibile.

19. UNA BUONA AZIONE [3432]

Il solido è un antiprisma a base quadrata:



Se guardiamo l'antiprisma dall'alto, possiamo vedere un ottagono:



Per calcolare il volume possiamo pensare di ricavare l'antiprisma da un prisma a base ottagonale, togliendogli 8 piramidi uguali; per fare ciò dobbiamo calcolare l'area dell'ottagono, l'area del triangolo ABC e l'altezza dell'antiprisma.

Calcoliamo prima di tutto la misura del segmento BH sfruttando le informazioni sui due quadrati:

$$BH = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

L'area del triangolo è quindi:

$A_{ABC} = \dfrac{1\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$ e di conseguenza l'area dell'ottagono risulta pari a:

$$A_{ottagono} = A_{quadrato} + 4\cdot A_{ABC} = 1 + 4\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{4} = \sqrt{2}$$

Calcoliamo ora l'altezza dell'antiprisma:

$$BK = \sqrt{HK^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{2+1-2\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}.$$

A questo punto possiamo calcolare il volume cercato:

$$V = V_{prisma-ottagonale} - 8\cdot V_{piramide} = A_{ottagono}\cdot BK - \frac{8}{3}\cdot A_{ABC}\cdot BK = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{8}{3}\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}+2}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)^2}}{6} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}(6+4\sqrt{2})}}{6} = \frac{2\sqrt{3\sqrt{2}+4}}{6} = \frac{\sqrt{4+3\sqrt{2}}}{3}$$

20. IL WONKA ASCENSORE [3]
Riscriviamo ciascuna delle informazioni facendo il minimo comune multiplo:

$$\frac{abc+1}{bc}=\frac{1}{5} \qquad \frac{abc+1}{ac}=-\frac{1}{15} \qquad \frac{abc+1}{ab}=\frac{1}{3}$$

Ora facciamo in modo che tutte e tre le espressioni abbiano lo stesso denominatore a sinistra del segno di uguaglianza:

$$\frac{abc+1}{abc}a=\frac{1}{5} \qquad \frac{abc+1}{abc}b=-\frac{1}{15} \qquad \frac{abc+1}{abc}c=\frac{1}{3}$$

Chiamando $k=\frac{abc+1}{abc}$, i tre dati possono essere scritti

$$a=\frac{1}{5k} \qquad b=-\frac{1}{15k} \qquad c=\frac{1}{3k}$$

Calcoliamo

$$n=\frac{c-b}{c-a}=\frac{\frac{1}{3k}+\frac{1}{15k}}{\frac{1}{3k}-\frac{1}{5k}}=\frac{\frac{5+1}{15k}}{\frac{5-3}{15k}}=\frac{6}{2}=3$$

BUON NATALE