SOLUZIONI ALLENAMENTO GARA A SQUADRE ON-LINE (17/10/2011)

1. LA RICONTA [7969]
Riscriviamo l'operazione in forma di addizione:

4	E	F	8	8	D	+
2	G	H	B	7	3	=
A	0	0	8	C	2	-

Partendo dalle unità si osserva che D=9 è l'unica possibilità per ottenere come somma 3.
Avendo il riporto di una unità, 8+7+1=16, ci assicurano che C=6 e che B=9 per garantire la cifra 8 nella somma.
Ora, sempre con riporto di 1, F+H=9 e E+G=9 per poter avere cifra 0 nel risultato. Segue che A=4+2+1=7

4	E	F	8	8	9	+
2	G	H	9	7	3	=
7	0	0	8	6	2	-

Non è possibile sapere i valori corretti di E,F,G e H.

2. QUEI BRAVI STUDENTI DI UNA VOLTA! [511]
Si osserva che scelte n cifre tutte diverse tra loro, c'è un solo modo possibile per metterle in ordine crescente.
L'insieme delle cifre possibili è: $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ in quanto lo zero non può farvi parte.

I numeri naturali, positivi formati da n cifre sono quindi $\binom{9}{n}$

La soluzione del problema è dunque

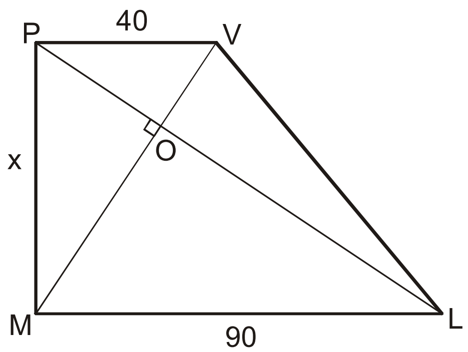
$$\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+..+\binom{9}{9}=2^9-1=511$$

Dove si è tenuto conto che la riga $n-esima$ del triangolo di tartaglia da come somma dei valori 2^n

3. NATALI CELEBRI [463]
Il primo può essere nato quando vuole all'interno della settimana: $p_1=1$, il secondo deve essere natu uno dei 6 giorni rimanenti: $p_2=\frac{6}{7}$, il terzo in uno dei 5 non occupati dai due precedenti: $p_3=\frac{5}{7}$ ed infine l'ultimo in uno dei 4 giorni rimasti: $p_4=\frac{4}{7}$

$$P=1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{120}{343}$$

4. IL QUADRILATERO DI RADETZKY [60]
Riportiamo le informazioni del problema su una figura.



Siano: $PM=x$, $PL=y$ e $MV=z$
Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli PVM e PLM possiamo scrivere che $x^2+40^2=z^2$ e che $x^2+90^2=y^2$.
Sottraendo le due equazioni $y^2-z^2=90^2-40^2$.

Il triangolo MOL è simile a POV con un rapporto di similitudine di $\frac{9}{4}$, quindi i lati $MO=\frac{9}{13}z$ e $OL=\frac{9}{13}y$, da cui segue che

$$\left(\frac{9}{13}z\right)^2+\left(\frac{9}{13}y\right)^2=90^2$$, che semplificando diventa

$$z^2+y^2=130^2$$

Mettiamo le equazioni trovate a sistema:

$$\begin{cases} y^2+z^2=130^2 \\ y^2-z^2=90^2-40^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2=11700 \\ z^2=5200 \end{cases} \qquad x^2=5200-40^2=3600 \qquad x=60$$

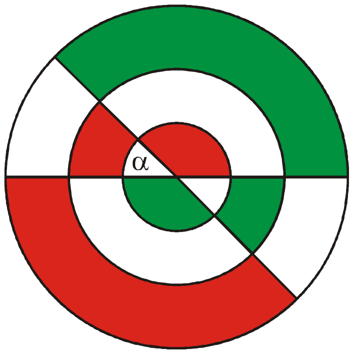
5. I TAGLI SONO SEMPRE ESISTITI! [1620]
Sia x il valore della spesa del primo anno.

In 5 anni la spesa fu pari alla centesima parte del debito iniziale, quindi

$S_5 = x + \frac{x}{3} + \frac{x}{3^2} + \frac{x}{3^3} + \frac{x}{3^4} = \frac{121.000.000}{100}$ marenghi ,da cui possiamo ricavare che

$\frac{121}{81}x = 1.210.000$ da cui segue che $x = 810.000 \text{ marenghi} = 16.200.000 \text{ lire}$

6. L'AIUOLA DAI COLORI NAZIONALI. [45]
La disposizione dei fiori, seguendo i vincoli del problema, deve essere quella a fianco rappresentata. Sia α l'angolo cercato.



Calcoliamo l'area coperta dai fiori bianchi e dai fiori rossi:

$$A_B = 2 \cdot \left(\alpha \cdot 10^2 + (180° - \alpha)(20^2 - 10^2) + \alpha(30^2 - 20^2)\right) = 600\alpha + 180 \cdot 600$$

$$A_R = (180° - \alpha) \cdot 10^2 + \alpha(20^2 - 10^2) + (180 - \alpha)(30^2 - 20^2) = -300\alpha + 180 \cdot 600$$

Ora risolviamo l'equazione $A_B = \frac{10}{7} A_R$

$$(600\alpha + 180 \cdot 600) \cdot 7 = (-300\alpha + 180 \cdot 600) \cdot 10$$

Semplificando per 100 ed eseguendo i calcoli:

$$72\alpha = 180 \cdot 18$$
$$\alpha = 45°$$

7. IL LAGO NEL PARCO [9747]

Sia x il lato del quadrato del lago:
Il lago ha area $A_L = x^2$

Le tre aiuole hanno area $A_A = 4 \cdot x \cdot \frac{x}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}x^2$
L'area del quadrato grande, calcolata usando la sua diagonale, è data da:

$$A_T = \frac{1}{2}\left(x + 2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2}x^2$$

Il terreno incolto ha dunque area

$$A_I = A_T - A_L - A_A = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2}x^2 - x^2 - 2\sqrt{3}x^2 = x^2 = 9747 \text{ m}^2$$

8. I DUE CORI. [2745]
Siano x il numero degli iscritti al coro *Rossini* e y quelli al coro *Verdi*.

Sappiamo che $\frac{30}{100}y = \frac{80}{100}x$, cioè $y = \frac{8}{3}x$

Del coro Rossini, non fanno parte di alcun coro il 20%, quindi

$$7869 = \frac{8}{3}x + \frac{20}{100}x$$

Da cui segue che $x = 2745$

9. L'INCONTRO DI TEANO. [3213]
Schematizziamo le informazioni:

	CAVALLO	TRENO	DILIGENZA
Re	NO		
Garibaldi			
Colonnello			
Capitano	SI	NO	NO
Tenente			
Sergente		NO	

Si capisce subito che il Re può aver fatto coppia solo con il Sergente, e per esclusione Garibaldi con il capitano, ne segue anche che Garibaldi ha viaggiato a cavallo.

	CAVALLO	TRENO	DILIGENZA
Re	NO		
Garibaldi	SI	NO	NO
Colonnello	NO		
Capitano	SI	NO	NO
Tenente	NO		
Sergente	NO	NO	

Ecco quindi che il sergente ha viaggiato con il Re in diligenza e per esclusione il Colonnello e il Tenente in Treno.

	CAVALLO	TRENO	DILIGENZA
Re	NO	NO	SI
Garibaldi	SI	NO	NO
Colonnello	NO	SI	NO
Capitano	SI	NO	NO
Tenente	NO	SI	NO
Sergente	NO	NO	SI

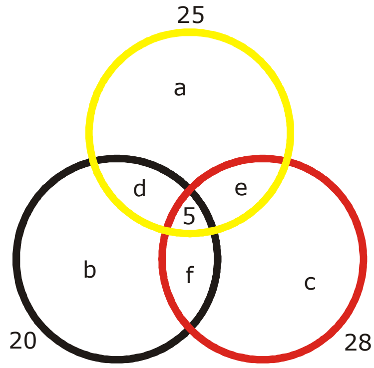
10. PARLAMENTO ATTUALE … VISTO DA GARIBALDI. [937]
Se x parlamentari hanno $x-1$ cause aperte, in tutto ci saranno
$\frac{x(x-1)}{2} = 438516 \qquad x(x-1) = 877032$
Equazione che può essere sia con la formula dell'equazione di secondo grado che fattorizzando il numero a destra dell'uguale alla ricerca di due fattori consecutivi.

$$877032 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 937 = 936 \cdot 937$$

$$x = 937$$

11. GALLI AL GUINZAGLIO! [4]

Riferendoci alla figura a lato, dai dati possiamo scrivere:



$36 = a + b + c + d + e + f + 5 \qquad a + b + c + d + e + f = 31$

$$25 + 20 = a + b + e + f + 2d + 10$$
$$25 + 28 = a + c + d + f + 2e + 10$$
$$28 + 20 = b + c + d + e + 2f + 10$$

Sommando le tre sopra riportate:

$116 = 2a + 2b + 2c + 4d + 4e + 4f$

che semplificata diventa

$58 = a + b + c + 2d + 2e + 2f$

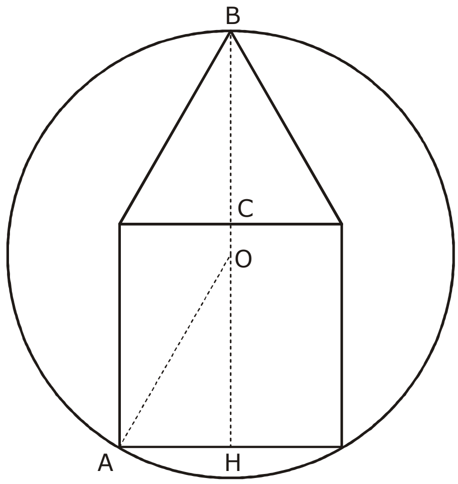
Inseriamo l'informazione della prima equazione calcolata

$d + e + f = 27$

da cui segue che

$a + b + c = 58 - 2 \cdot 27 = 4$

12 LA LEGGE CASATI [1000]



Riferendoci alla figura a lato, sia $OA = OB = r$, e sia x il lato del quadrato.

Determiniamo i valori dei lati del triangolo rettangolo AOH dove applichiamo il Teorema di Pitagora:

$$AH = \frac{x}{2}$$

$$OH = CH - OC = CH - (OB - CB) = x - \left(r - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}x - r$$

$$AH^2 + OH^2 = AO^2$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}x - r\right)^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{4+3-4\sqrt{3}}{4}x^2 + r^2 - (2-\sqrt{3})rx = r^2$$

$$(2-\sqrt{3})x^2 = (2-\sqrt{3})xr$$

$$x = r$$

13 BUCHI NERI [513]

Sia x il numero cercato ($a_0 = x$).

Alla prima iterazione viene calcolato $a_1 = 2x - 1$, alla seconda $a_2 = 2(2x-1) - 1 = 2^2x - 2 - 1$

In generale all'n-esima iterazione $a_n = 2^n x - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \ldots - 2 - 1 = 2^n x - 2^n + 1$

Utilizzando le informazioni del problema, possiamo scrivere l'equazione:

$$2^{2011}x - 2^{2011} + 1 = 2^{2020} + 1$$

$$2^{2011}(x-1) = 2^{2020}$$

$$x = 2^9 + 1 = 513$$

14. LA PAGA DEI MUSICISTI [240]

Sia S la somma di denaro destinata ai tre musicisti.

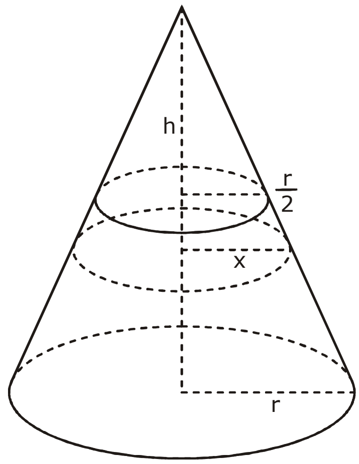
Il più vecchio prende un terzo della metà di S (la parte fissa) più la parte proporzionale alla sua età, che essendo esattamente pari alla somma di quella dei colleghi, sarà esattamente la metà della somma destinata alla divisione in maniera proporzionale. Trasformando il tutto in equazione:

$$\frac{1}{3}\frac{S}{2}+\frac{1}{2}\frac{S}{2}=1\,\text{lira}$$

$$S=\frac{12}{5}\,\text{lira}=240\,\text{centesimi}$$

15. GEOMETRIA COL … *CUORE* [76]

Calcoliamo il volume del tronco di cono occupato dall'inchiostro:



$$V=\frac{\pi}{3}r^2\cdot 80-\frac{\pi}{3}\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot 40=\frac{70}{3}\pi r^2$$

Se h e x sono rispettivamente l'altezza del cono e la base del cono riempito dall'inchiostro, una volta capovolto, il volume occupato sarà:

$$V=\frac{\pi}{3}x^2h$$

Uguagliando le due espressioni e semplificando si ottiene

$$x^2h=70r^2$$

Ora sfruttando la proporzione $h:x=80:r$, possiamo ricavare x e sostituire nella relazione precedente:

$$\left(\frac{hr}{80}\right)^2h=70r^2$$

$$h^3=70\cdot 80^2=7\cdot 2^6\cdot 10^3$$

$$h=40\cdot\sqrt[3]{7}\cong 76{,}516$$

16. VITA DURA ANCHE PER I COMANDANTI! [4368]

In un reticolo 11 x 5 il comandante dovrà spostarsi 5 volte verso nord (N) e 11 volte verso est (E).
Il suo movimento sarà dunque un qualunque anagramma di "NNNNNEEEEEEEEEEE".

$$n=\frac{16!}{5!\cdot 11!}=4368$$

17. ARMONICHE … NON SOLO IN MUSICA! [25]

Se 3 e 4 sono i primi due termini della successione armonica, allora $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ sono i primi due termini di una successione aritmetica. La successione aritmetica ha ragione $k=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$.

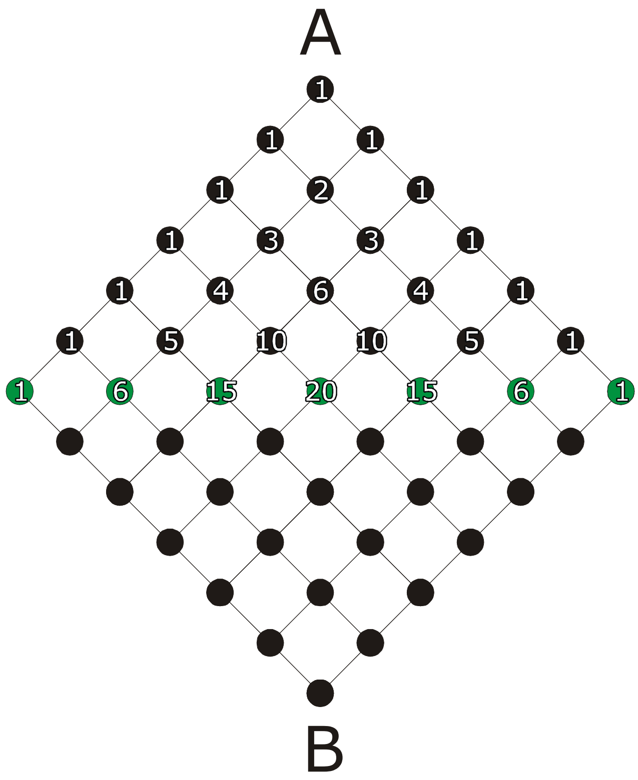
I due termini successivi sono quindi $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$. La successione armonica sarà quindi composta da 3,4,6 e 12 la cui somma da 25.

18. CALCOLI TRA … MILLE. [20]

$$5^{1848} \cdot 2^{1861} = (5 \cdot 2)^{1848} \cdot 2^{13} = 8192 \cdot 10^{1848}$$

La somma delle cifre è 20, visto che il numero termina con 1848 zeri.

19. VITTORIO A CAVALLO [1255]]



Sviluppando il triangolo di Tartaglia fino alla sesta riga è possibile calcolare molto velocemente la probabilità di ciascun amico di raggiungere un punto della diagonale (indicati in figura con il colore verde).

La probabilità di incontrarsi è data da:

$$\frac{1}{2^6} \cdot \frac{1}{2^6} \cdot 2 + \frac{6}{2^6} \cdot \frac{6}{2^6} \cdot 2 + \frac{15}{2^6} \cdot \frac{15}{2^6} \cdot 2 + \frac{20}{2^6} \cdot \frac{20}{2^6} = \frac{231}{1024}$$

20. CALCOLI A-NORMALI. [15]

Sia per comodità $x = \frac{1}{\sqrt{15}}$

Il problema diventa:

$$S = 1 + 2(1-x) + 3(1-x)^2 + 4(1-x)^3 + 5(1-x)^4 + ...$$

Scrivendo i vari addendi, rappresentati dai coefficienti si può scrivere:

$$\begin{aligned}
&1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + (1-x)^4 + ... + \\
&\quad (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + (1-x)^4 + ... + \\
&\qquad (1-x)^2 + (1-x)^3 + (1-x)^4 + ... + \\
&\qquad\quad (1-x)^3 + (1-x)^4 + ... + ...
\end{aligned}$$

La prima riga è la serie geometrica

$$1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + (1-x)^4 + ... = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$$

La seconda riga, raccogliendo un fattore $(1-x)$ è di nuovo la serie geometrica sopra riportata e così via per ogni riga successiva

$$1 + 2(1-x) + 3(1-x)^2 + 4(1-x)^3 + 5(1-x)^4 + ... =$$

$$\frac{1}{x} + (1-x) \cdot \frac{1}{x} + (1-x)^2 \cdot \frac{1}{x} + (1-x)^3 \cdot \frac{1}{x} + (1-x)^4 \cdot \frac{1}{x} + ... =$$

$$\frac{1}{x}\left(1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + (1-x)^4 + ...\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$$

La soluzione richiesta è dunque $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} = 15$