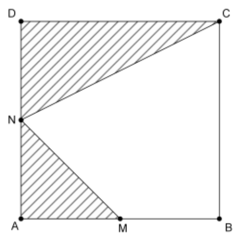
SOLUZIONI PROBLEMI ALLENAMENTO GARA A SQUADRE ONLINE SCUOLE MEDIE (25-01-2012)

1. OROLOGI [0099]
I matematici che portano l'orologio sono 99 in quanto se ce ne fossero 2 senza orologio esisterebbe una coppia di matematici che non soddisfa le condizioni del problema.

2. AGNESE FA I DOLCI [0008]
Con 7 dozzine di uova (84 uova), Agnese può fare al massimo 14 dolci; con 4 Kg di zucchero, può fare al massimo 13 dolci; con 5 pacchetti di burro da 250 g ciascuno (1250 g in totale), può fare al massimo 8 dolci; con 5,5 kg di farina può fare al massimo 11 dolci. Pertanto, utilizzando tutti gli ingredienti a disposizione, Agnese può fare al massimo 8 dolci.



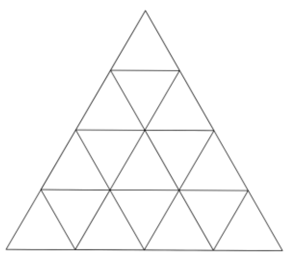
3. UN QUADRATO [0020]
La parte colorata rappresenta i $\frac{3}{8}$ dell'area del quadrato, che quindi vale $12 \cdot \frac{8}{3} = 32$. Pertanto risulta $Area(MNCB) = \frac{5}{8} \cdot 32 = 20.$

4. UNITA' [0036]
La cifra delle unità non può valere né 0 né 1. Se la cifra delle unità è 2, un solo numero (12) verifica le condizioni del problema; se la cifra delle unità è 3, due soli numeri (13 e 23) verificano le condizioni del problema; se la cifra delle unità è 4, tre soli numeri (14,24 e 34) verificano le condizioni del problema; ecc. ecc. In generale, se la cifra delle unità è k, soddisfano il problema k-1 numeri. Essendo k variabile da 2 a 9, il totale dei numeri di due cifre cercati è $1+2+3+4+5+6+7+8=36.$

5. ILLUMINAZIONE [0050]
La distanza tra due lampioni successivi si ottiene calcolando il massimo comune divisore di 150, 210 e 300, ed è quindi 30 metri. Il numero di lampioni da installare su ogni lato di ciascuna strada sarà quindi 6, 8 e 11 rispettivamente. Il numero totale di lampioni occorrenti è quindi $2 \cdot (6+8+11) = 50.$

6. QUANTI TRIANGOLI! [0027]
Poniamo uguale a 1 il lato dei triangoli più piccoli. Per ogni triangolo equilatero, chiamiamo semplicemente vertice del triangolo il vertice opposto al suo lato orizzontale. Allora ci sono:

- 16 triangoli di lato 1 (10 con il vertice in alto e 6 con il vertice in basso);
- 7 triangoli equilateri di lato 2, di cui 6 con il vertice in alto e 1 con il vertice in basso (il punto medio del lato inferiore della figura);
- 3 triangoli equilateri di lato 3 (tutti con il vertice in alto);
- 1 triangolo equilatero di lato 4 (la cornice dell'intera figura).



7. LE MATITE COLORATE [0032]
Ci sono 32 matite. Infatti, se per essere certi di prenderne una blu bisogna estrarne 25, sgnifica che prima vengono estratte tutte le matite di altri colori, che quindi sono 24, e poi la matita blu, dell'ultimo colore rimasto. Per essere certi di prendere tutte le matite di uno stesso colore bisogna estrarne 29, cioè per ogni colore tutte le matite meno una, più una matita qualunque che completi un unico colore: quindi 28 è il numero dei colori moltiplicato per il numero, meno uno, delle matite di ogni colore. Il numero dei colori meno uno è pertanto

un divisore di 24 mentre il numero di colori è divisore di 28. I divisori di 24 sono 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 (quindi aggiungendo 1 si trovano i numeri 2, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 25); i divisori di 28 sono 1, 2, 4, 7, 14, 28. I colori possibili possono essere 2, 4 o 7. I numeri 2 e 7 non soddisfano però le due condizioni del problema: per esempio, se i colori fossero 7 si avrebbe 6x4=24, ma 7x3 è diverso da 28. Il numero 4 le soddisfa : 3x8=24 e 4x7=28. I colori sono dunque 4, le matite per ogni colore 8, per un totale di 32.

8. TRIANGOLI EQUILATERI [0007]

Prima soluzione. Il triangolo ADE è equilatero di lato AD. Detto l il lato del triangolo ABC ed F il punto di intersezione tra AC e DE, risulta $AD = l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $AF = AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}l$. Si ha dunque:

$$\frac{Area(ADE)}{Area(ABC)} = \frac{\frac{DE\cdot AF}{2}}{\frac{BC\cdot AD}{2}} = \frac{DE\cdot AF}{BC\cdot AD} = \frac{l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{4}l}{l\cdot l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{4}.$$

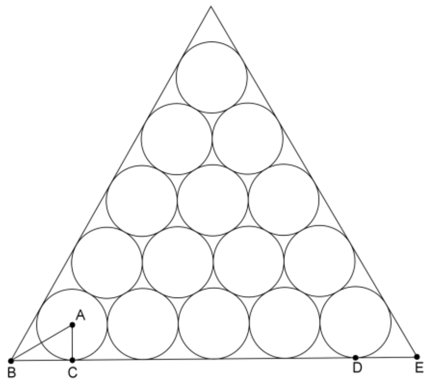
Seconda soluzione. I triangoli ABC e DAE sono simili, essendo entrambi equilateri. Detto l il lato del triangolo ABC, risulta $AD = l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. IL MAGO [0250]

Il blocco di cemento finale risulterà simile a quello di partenza. La sua superficie sarà $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ della superficie del blocco iniziale e il volume $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ di quello iniziale; pertanto il blocco di cemento peserà 16:64=0,250 tonnellate ovvero 250 chilogrammi.

10. IL QUADRILATERO [0092]

Al minimo l'ampiezza dell'angolo maggiore deve essere 92°. Si ha l'ampiezza minima se le misure degli angoli si avvicinano il più possibile all'ampiezza media (90°). La misura degli angoli e allora: 88°, 89°, 91° e 92°.



11. PALLE DA BILIARDO [3439]

Osserviamo che il lato l della cornice (è un triangolo equilatero) è dato dalla somma delle misure dei segmenti BC, CD e DE. Risulta CD=8, AC=1, AB=2 (perché ABC è mezzo triangolo equilatero) e quindi $BC = \sqrt{3}$. Pertanto $l = 8 + 2\sqrt{3}$ e quindi il perimetro della cornice misura $24 + 6\sqrt{3} \simeq 34,3926$.

12. CHI E' IN ANTICIPO E CHI IN RITARDO [0740]

Ogni ora, si forma una "forbice" di 8 minuti. Adesso la forbice è di 72 minuti. Sono passate 9 ore dal momento in cui i due orologi erano esatti. Allora, l'orologio di Nando è avanti di 27 minuti, quello di Giorgio è indietro di 45 minuti. Sono esattamente le 16:40. 9 ore fa erano le 7:40.

13. CUBI INCOLLATI [0075]

Le facce sono in totale $125\cdot 6 = 750$, quelle non incollate sono soltanto quelle esterne, il cui numero è pari alla superficie totale del cubo, cioè 150. Pertanto ci sono 300 coppie di facce da incollare, e quindi occorrono $300\cdot 0,25 = 75$ grammi di colla.

14. POLIGONI ISOPERIMETRICI [0050]

Sia $3l$ il perimetro dei due poligoni. Pertanto il lato dell'esagono vale $\frac{l}{2}$. Risulta quindi $T=\frac{l\cdot l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=l^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$ e $E=\frac{3l\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=3l^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}$. Da ciò segue che E vale il 50% in più di T.

15. LA CIFRA FINALE [0003]

Osserviamo che la cifra delle unità delle potenze di 517 si ripetono con periodo 4 nell'ordine seguente: 7, 9, 3, 1. Essendo 712 multiplo di 4, l'ultima cifra di 517^{712} è 1 e quindi l'ultima cifra del numero 517^{715} è 3.

16. UNA SUCCESSIONE FIBONACCIOSA… [0116]

Detto x il secondo termine della successione, i 6 termini saranno: 4, x, 4+x, 4+2x, 8+3x, 47. Ma 47=8+3x+4+2x, da cui si ricava x=7. I termini della successione sono quindi 4,7,11,18,29,47 e la loro somma vale 116.

17. IL NUMERO SEGRETO [0069]

Siano *d* e *u* due numeri naturali minori o uguali a 9, che rappresentano rispettivamente la cifre delle decine ($d\neq 0$) e quella delle unità del numero cercato. Deve essere:

$$10d+u=4d+5u \quad \text{cioè} \quad 6d=4u\Rightarrow d=\frac{2}{3}u$$

e poiché *d* deve essere un numero naturale i possibili valori di *u* sono o 3 o 6 o 9.
I possibili valori sarebbero:

u	*d*	Numero di due cifre
3	2	32
6	4	46
9	6	69

Ma il numero deve essere il più grande possibile quindi è 69.

18. PAGINE INCOGNITE [0336]

Per le prime 9 pagine si utilizzano in tutto 9 cifre; per le successive 90 pagine (da 10 a 99) si utilizzano in tutto 180 cifre. Restano 900-9-180=711 caratteri da utilizzare per scrivere numeri di 3 cifre. Poiché $\frac{711}{3}=237$, si possono scrivere ancora 237 numeri di 3 cifre, da 100 a 336.

19. I NUMERI DI MICHELE [0770]

Prima soluzione. Ci sono esattamente 9 numeri da due cifre che soddisfano la condizione.
<u>Numeri da tre cifre</u>
Tra i numeri che iniziano con la cifra 1, quelli "buoni" sono tutti i numeri da 110 a 119, tutti i numeri che hanno seconda cifra 1 (eccetto 111) e tutti i numeri che hanno la seconda e la terza cifra uguali (eccetto 111). Essi sono rispettivamente 10, 9 e 9. In totale 28.
Analogamente per i numeri che iniziano con le cifre da 2 a 9.
Pertanto i numeri "buoni" di tre cifre sono $28\cdot 9=252$.
<u>Numeri da quattro cifre</u>
I numeri "buoni" sono:

- ✓ quelli che iniziano con 11, da 1100 a 1199 (100 in totale);
- ✓ quelli che iniziano con 1 ma non aventi seconda cifra 1: tutti i numeri da 1000 a 1019 (20), altri che iniziano con 10 e finiscono con 0 (8), altri che iniziano con 10 e finiscono con 1 (8), altri aventi le ultime due cifre uguali (8). In totale sono 44.
- ✓ analogamente per i numeri che iniziano per 12, 13,…, 19.
- ✓ tutti i numeri da 2000 a 2012 (13 in totale).

I numeri “buoni” di 4 cifre sono quindi: $100+44\cdot 9+13=509$.

In conclusione, i numeri di Michele sono $9+252+509=770$.

Seconda soluzione. Invece di contare i numeri che ha scritto, contiamo quelli che non ha scritto.
9 da 1 cifra, cioè tutti.
81 da 2 cifre: 9 possibili cifre per la decina (zero non è permesso) e 9 per l’unità (tutte tranne quella già usata per la decina).
648 da 3 cifre: 9 possibili scelte per la centinaia, 9 per la decina e 8 per l’unità.
504 da 4 cifre e fino a 1999: la cifra delle migliaia è 1, la cifra delle centinaia ha 9 possibilità, quella delle decine 8 e 7 per le unità.
Nessuno oltre 1999, in quanto tutti hanno una cifra ripetuta.
In totale non ha scritto 1242 numeri, quindi ne ha scritti 2012-1242=770.

20. FATTORIALI IN BOTTIGLIA [0013]

Osserviamo che gli addendi $10!,11!,12!,\ldots,20!$ non contribuiscono alla determinazione delle ultime due cifre del numero $1!+2!+3!+\ldots+20!$ in quanto tra i loro fattori primi sono presenti almeno due fattori 2 e almeno due fattori 5. Pertanto, le ultime due cifre del numero $1!+2!+3!+\ldots+20!$ sono le ultime due cifre della somma $1!+2!+3!+\ldots+9!=1+2+6+24+120+720+5040+40320+362880$, le cui ultime due cifre sono 13.