

Soluzioni allenamento gara a squadre online - Scuole medie (19-10-2011)

1. FATTORIALI [0048]

Per determinare l'esponente della più grande potenza di 3 che divide 100! basta trovare il numero dei suoi divisori multipli di 3, multipli di 9, multipli di 27, multipli di 81 e sommare i valori ottenuti. Pertanto risultano essere:

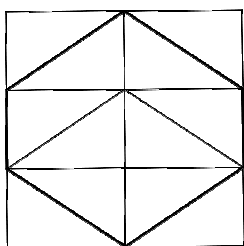
$$\left[\frac{100}{3} \right] = 33 \quad \text{il numero dei divisori di } 100! \text{ multipli di } 3;$$

$$\left[\frac{100}{9} \right] = 11 \quad \text{il numero dei divisori di } 100! \text{ multipli di } 9;$$

$$\left[\frac{100}{27} \right] = 3 \quad \text{il numero dei divisori di } 100! \text{ multipli di } 27;$$

$$\left[\frac{100}{81} \right] = 1 \quad \text{il numero dei divisori di } 100! \text{ multipli di } 81.$$

La risposta sarà dunque $33+11+3+1=48$.



2. UNA STRANA FIGURA... [1500]

Osserviamo, nella figura a fianco, che il quadrato esterno di lato l risulta costituito da 12 triangolini equivalenti, aventi base $\frac{l}{2}$ e altezza $\frac{l}{3}$, mentre l'esagono interno è costituito da 8 di tali triangolini. Pertanto, detta A l'area di un triangolino, risulta: $\frac{Area(Quadrato)}{Area(Esagono)} = \frac{12A}{8A} = \frac{3}{2}$. La risposta è

quindi 1500.

3. LAMPADINE [0031]

Indichiamo con 1 la lampadina accesa e con 0 la lampadina spenta. Le sequenze lunghe 5 formate da 0 e 1 sono $2^5 = 32$. Una sola è formata da soli zeri. Pertanto si avrà almeno una lampadina accesa in 31 modi diversi.

4. QUOZIENTI E RESTI [0015]

Detti r e q rispettivamente il resto e il quoziente della divisione di un numero naturale a per 16, risulta $a = 16 \cdot q + r$, con $r = 0, 1, \dots, 15$. Dovendo essere $r = q$, risulta necessariamente $q = r = 1, 2, \dots, 15$ e pertanto i numeri cercati sono 15.

5. BUGIE [0003]

Avendo detto 7 bugie, il naso di Pinocchio raggiungerà la lunghezza di 26 cm. I 6 cm in eccesso li recupera dicendo 3 volte la verità.

6. CALCOLI GAUSSIANI [5250]

Risulta:

$$\frac{3^2-3}{2} + \frac{4^2-4}{3} + \dots + \frac{500^2-500}{499} + 3 = \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 3}{3} + \frac{5 \cdot 4}{4} + \dots + \frac{500 \cdot 499}{499} + 3 =$$
$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 500 = \frac{500 \cdot 501}{2} = 125250$$

La risposta è pertanto 5250.

7. DISTRAZIONE [1212]

Per arrivare in stazione alle 12:30 esatte, il signor Algebrini è partito da casa la seconda volta alle 12:18. Tra le 12:00 e le 12:18 ha camminato per un tempo T percorrendo un certo tratto, che poi ha ripercorso all'indietro di corsa, impiegando un tempo $\frac{T}{2}$. Poiché $T + \frac{T}{2} = 18$, se ne deduce che $T=12$, e dunque il signor Algebrini si è accorto di aver dimenticato il portafoglio alle 12:12.

8. L'OPERAZIONE ERRATA [0020]

Sia k il valore da trovare. Si deve avere $(316+k) \cdot (59+k) = 26524+k$, cioè $k^2 + 374k - 7880 = 0$, la cui unica soluzione accettabile è $k=20$.

Alternativamente, le cifre delle unità sembrano corrette ($9 \times 6 = 54$). Provando a modificare le cifre delle decine, si osserva che se aumentiamo di 10 i fattori otteniamo $326 \times 69 = 22494$ e il risultato è troppo basso; se aumentiamo di 30 otteniamo $346 \times 89 = 30794$ e il risultato è troppo alto; se aumentiamo di 20 otteniamo $336 \times 79 = 26544$ e il risultato è quello cercato.

9. QUADRATO CRIPTICO [8946]

I numeri da inserire vanno cercati fra le dieci cifre da 0 a 9, eventualmente anche ripetendo quelle già presenti nel quadrato (1 e 7). Nella seconda riga, $D+B+B$ deve valere 26; l'unica combinazione possibile è $D=8$ e $B=9$. Il quadrato diventa:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 9 | C | 8 |
| 8 | 1 | 9 | 9 |
| A | 9 | 7 | |
| | 8 | 8 | |

Nella terza colonna, $C+9+7+8=27$ implica $C=3$:

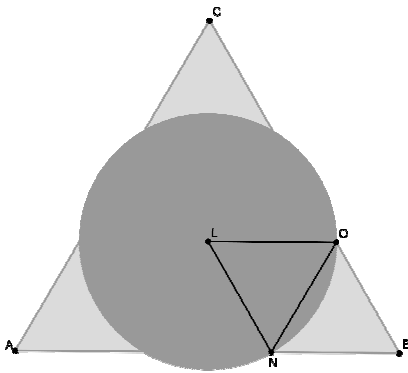
| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 9 | 3 | 8 |
| 8 | 1 | 9 | 9 |
| A | 9 | 7 | |
| | 8 | 8 | |

Nella prima colonna, $A+9+3+8=27$ implica $A=7$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 9 | 3 | 8 |
| 8 | 1 | 9 | 9 |
| 7 | 9 | 7 | |
| | 8 | 8 | |

Completando, otteniamo

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 9 | 3 | 8 |
| 8 | 1 | 9 | 9 |
| 7 | 9 | 7 | 4 |
| 5 | 8 | 8 | 6 |



10. UNO STRANO SIMBOLO [1027]

Sia l il raggio della circonferenza in figura. Dai dati del problema segue immediatamente che i triangoli OLN e OBN sono equilateri e congruenti e pertanto hanno entrambi lato l . Dai dati del problema segue che $l = 10$. L'area del triangolo curvilineo concavo OBN è data dalla differenza tra l'area del rombo OBNL e l'area del settore circolare OLN (triangolo curvilineo ONL convesso). Pertanto l'area richiesta vale

$$3 \cdot A(OBN_{conc}) = 3 \cdot (2A(OBN) - A(ONL_{conv})) = 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{l \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} - \frac{\pi l^2}{6} \right) = 3l^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = l^2 \cdot \frac{3\sqrt{3} - \pi}{2} =$$

$$= 100 \cdot \frac{3 \cdot 1,7321 - 3,1416}{2} = 102,735$$

La risposta è quindi 1027.

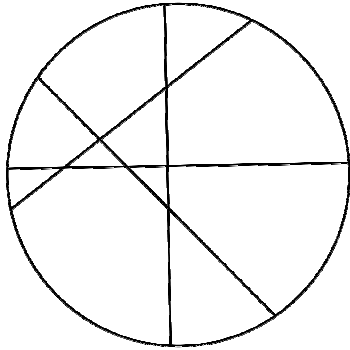
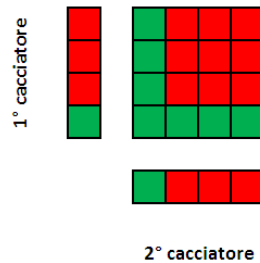
11. CIAK, SI GIRA! [0080]

Se la parte avvolta del nastro raddoppia il suo raggio maggiore, l'area del cerchio esterno quadruplica. Se dunque all'inizio l'area era A , dopo venti minuti vale $4A$ e quindi il nastro che si è avvolto in quei venti minuti si appoggia su un'area pari a $3A$. Quando il raggio maggiore raddoppia nuovamente l'area del cerchio esterno diventa $16A$ e quindi il nastro che si è avvolto in tale intervallo di tempo si appoggia su un'area pari a $12A$, che è il quadruplo della precedente. Poiché il nastro scorre uniformemente, il secondo intervallo di tempo è dunque quadruplo e cioè 80 minuti (si osservi che il raggio della parte in plastica della bobina non influenza il risultato).

12. BATTUTA DI CACCIA [0023]

La probabilità che nessuno dei due cacciatori colpisca la lepre è $\frac{9}{16}$, quindi la probabilità che almeno uno la colpisca è pari a $\frac{7}{16}$. La risposta è quindi $7+16=23$.

Rappresentazione grafica:



13. DIAMOCI UN TAGLIO... [0011]

Supponiamo di aver già effettuato $k-1$ tagli. Il k -esimo taglio (diverso dai precedenti) incontrerà i precedenti in un certo numero h di punti distinti interni alla torta. Allora il k -esimo taglio attraverserà $h+1$ parti distinte della torta, dividendo ciascuna di esse in due: l'effetto sarà dunque di aumentare il numero di parti della torta di una quantità pari a $h+1$.

D'altra parte, poiché due rette distinte si possono incontrare in al più un punto, si ha che $h \leq k-1$, e quindi con il k -esimo taglio il numero di parti della torta aumenterà di al più k . Partendo dalla situazione iniziale (1 sola parte), il numero di parti che si

possono venire a creare con 4 tagli è al più $1+1+2+3+4=11$. D'altra parte la figura a fianco mostra come si possano ottenere 11 parti con 4 tagli.

14. CUBI E TETRAEDRI [0072]

Il tetraedro $ABPQ$ può essere pensato come una piramide di base ABP e altezza QM , dove M è il punto medio di AB . Se lo spigolo del cubo è 12, l'area di base sarà $\frac{144}{4} = 36$ e l'altezza sarà 6.

Il volume del tetraedro sarà dunque $\frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6 = 72$.

15. PRODOTTI [0200]

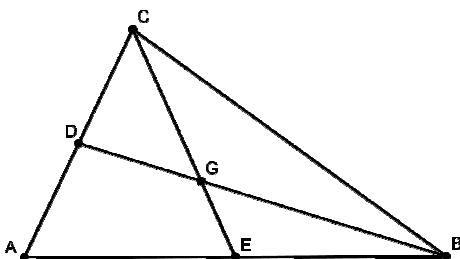
Svolgendo l'espressione, risulta:

$$\begin{aligned} & 201 \cdot 200 - 200 \cdot 199 + 199 \cdot 198 - 198 \cdot 197 + \dots + 5 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = \\ & = 200 \cdot 2 + 198 \cdot 2 + 196 \cdot 2 + \dots + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 2 \cdot (200 + 198 + 196 + \dots + 6 + 4 + 2) = \\ & = 2 \cdot (100^2 + 100) = 2 \cdot 100 \cdot 101 = 200 \cdot 101 = 20200 \end{aligned}$$

La risposta è pertanto 200.

16. BUON... PRANZO [0024]

Prendiamo, per comodità, un campione di 100 persone (50 donne e 50 uomini), di cui 15 non prendono il dessert. Poiché le donne D sono il quadruplo degli uomini U , si ha $D+U=15$ e $D=4U$, da cui $D=12$, $U=3$. Quindi 12 donne su 50 non prendono il dessert, cioè il 24%.



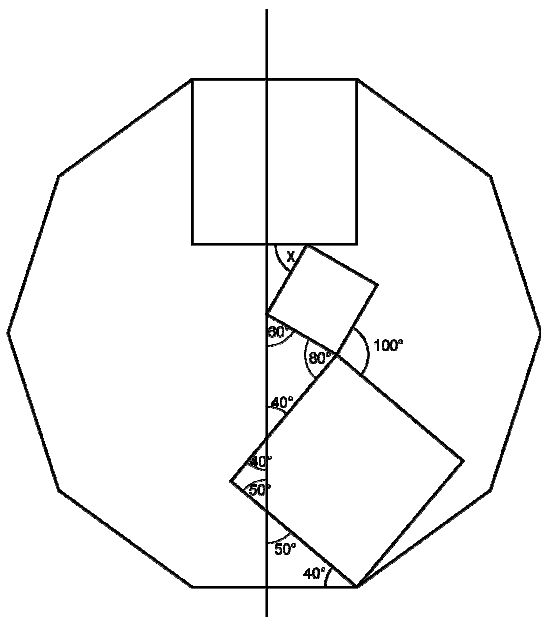
17. SEMPRE IN MEZZO! [0056]

Le mediane si incontrano in un punto che le divide in due parti, delle quali quella che esce da un vertice è doppia dell'altra. Si vede subito allora che BGE ha la base pari alla metà della base AB di ABC e altezza relativa pari a un terzo dell'altezza di ABC rispetto ad

A (in quanto $EG = \frac{1}{3} EC$). Quindi l'area di BGE è un sesto dell'area di ABC, cioè 56 m^2 .

18. UNO STRANO PIANETA [0008]

Detto x il numero delle ore in un giorno, risulta $x^4 = 4096$, da cui $x = 8$.



19. QUESTIONE DI ANGOLI [0060]

Tracciando la perpendicolare in figura, si ricava facilmente che il valore dell'angolo x è:

$$x = 180^\circ - 90^\circ - (180^\circ - 150^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

20. PROGRESSIONI [0014]

Il primo elemento in comune è il numero 23. A partire da esso, in entrambe le progressioni, gli elementi comuni sono del tipo $23 + 28k$, essendo 28 il m.c.m.(4,7) e k intero positivo tale che $23 + 28k < 407$. Dall'ultima relazione si ottiene $k \leq 13$ e pertanto gli elementi comuni sono 14.