# Soluzioni allenamento gara a squadre online – Scuole medie (16-11-2011)

**1. BUONA GARA!! [2005]**
Dato che 365 diviso per 7 da resto 1, ogni anno che passa il 16 Novembre avanza di un posto nella settimana se l'anno non è bisestile, di due posti se l'anno è bisestile. Siccome dal 2005 ad oggi sono passati 5 anni ordinari e uno bisestile (il 2008), il 16 Novembre 2005 era mercoledì.

**2. CONTEGGI [1782]**
Il numero cercato è dato dal numero di interi di tre cifre che sono 1800 meno il numero di quelli con tre cifre uguali che sono 18 quindi $1800-18=1782$.

**3. MUCCHE [0842]**
Detto *n* il numero di mucche, risulta:

$n=3q_1+2 \quad \Leftrightarrow \quad n-2=3q_1$

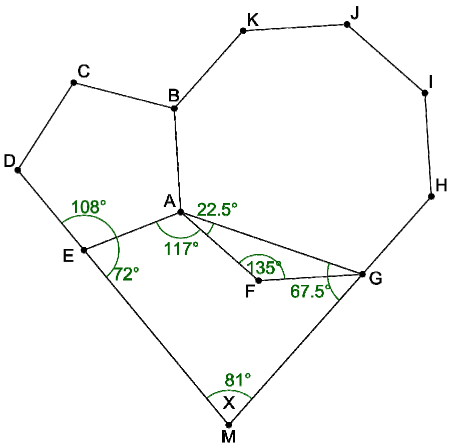
$n=4q_2+2 \quad \Leftrightarrow \quad n-2=4q_2$

$n=5q_3+2 \quad \Leftrightarrow \quad n-2=5q_3$

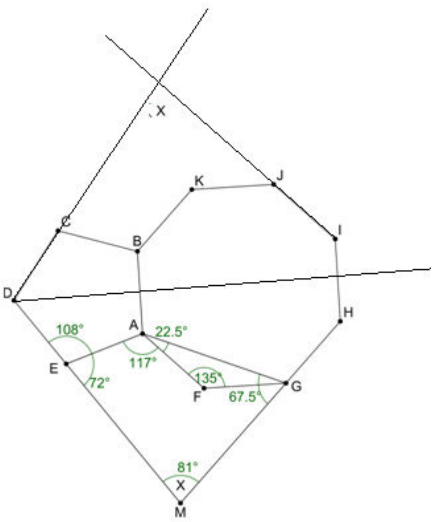
$n=7q_4+2 \quad \Leftrightarrow \quad n-2=7q_4$

$n=8q_5+2 \quad \Leftrightarrow \quad n-2=8q_5$

cioè $n-2$ è multiplo di 3,4,5,7 e 8 e quindi multiplo di $m.c.m.(3,4,5,7,8)=840$. Poiché $n<900$ necessariamente deve essere $n-2=840 \Rightarrow n=842$.




**4. GELATI GEOMETRICI [0081]**
***Prima soluzione.*** Ricordiamo che l'ampiezza di ciascuno degli angoli interni di un poligono regolare di $n$ lati è pari a $\frac{180°\cdot(n-2)}{n}$. Pertanto l'ampiezza degli angoli interni del pentagono regolare ABCDE in figura è pari a 108°, mentre quella degli angoli interni dell'ottagono AFGHIJKB in figura è pari a 135°. Ora, il triangolo AFG è isoscele sulla base AG e pertanto l'angolo $F\hat{A}G$ ha ampiezza pari a $\frac{180°-135°}{2}=22,5°$. Risulta allora $E\hat{A}G=360°-108°-135°+22,5°=139,5°$ e quindi $x=360°-72°-67,5°-139,5°=81°$.




***Seconda soluzione.*** Nel pentagono irregolare MEAFG, l'angolo interno $\hat{F}$ misura $245^\circ$ e l'angolo interno $\hat{G}$ misura $45^\circ$. Ricordando che la somma degli angoli interni di un pentagono è pari a $180^\circ\cdot(5-2)=540^\circ$, per differenza risulta $x=81^\circ$.

***Terza soluzione.*** Per simmetria, si ha: $2x+108^\circ+135^\circ+135^\circ=540^\circ$ da cui $x=81^\circ$.

**5. SOMME MILLENARIE [0016]**
Osserviamo che 2015 si può ottenere sommando 2011 interi positivi distinti nei seguenti modi:

1) sommando 2010 numeri uguali a 1 e un numero uguale a 5: in tal caso il prodotto di tutti gli addendi è 5;
2) sommando 2009 numeri uguali a 1 e due numeri uguali a 2 e 4 oppure entrambi 3: nel primo caso il prodotto di tutti gli addendi è 8, nel secondo caso 9;
3) sommando 2008 numeri uguali a 1 e tre numeri uguali a 2, 2 e 3: in tal caso il prodotto di tutti gli addendi è 12;
4) sommando 2007 numeri uguali a 1 e quattro numeri uguali a 2: in tal caso il prodotto di tutti gli addendi è 16.

Il prodotto vale, allora, al massimo 16.

**6. QUANTE CIFRE! [0165]**
Osserviamo che $999..99 = 10^{66} - 1$ e pertanto $m \cdot n = (10^{66} - 1) \cdot 666...66 = 666...66000...00 - 666...66$. Nell'ultima sottrazione, il minuendo è costituito da 99 cifre uguali a 6 e 66 cifre uguali a 0, cioè da 165 cifre complessivamente. Sottraendo ad esso *n*, che ha un numero minore di cifre, la prima cifra, che è 6, può al massimo diminuire di uno, e quindi il numero di cifre non cambia.

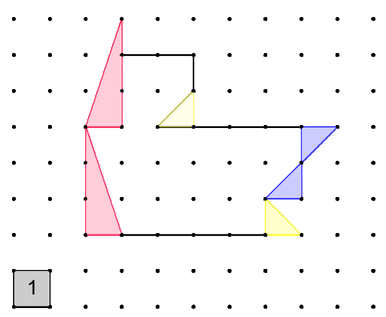
**7. LEPRI E SEGUGI [0120]**
Due falcate del cane coprono $2 \cdot 2 = 4m$, nello stesso tempo 3 falcate della lepre che scappa coprono $3 \cdot 1 = 3m$. Dunque ogni volta che il cane percorre 4 m ne guadagna 1 sulla lepre, che quindi verrà raggiunta in un punto che dista $4 \cdot 30 = 120m$ dal punto A.

**8. ZANZARE [0050]**
Le sequenze lunghe 6 formate da B e Z sono $2^6 = 64$. Una sola è formata da sole lettere B e una da sole lettere Z, 6 sono formate da una sola lettera B e 5 lettere Z, 6 sono formate da una sola lettera Z e 5 lettere B. La risposta è pertanto $64 - 2 - 12 = 50$.

**9. ORDINAMENTI PARTICOLARI [5231]**
Contare il numero di zeri con cui termina un numero *n* significa vedere qual è la più grande potenza di $10 = 2 \cdot 5$ per cui è divisibile *n*. Si tratta dunque di vedere qual è il minimo tra gli esponenti di 2 e 5 nella fattorizzazione del numero *n*. Nel nostro caso si ha:

1) $7^{32} \cdot 2^{11} \cdot 5^{13}$: l'esponente più basso di 2 e 5 è 11;
2) $6^6 \cdot 4^4 \cdot 5^7 = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^7 = 2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^7$: l'esponente più basso di 2 e 5 è 7;
3) $14^5 \cdot 8^5 \cdot 15^9 = 2^5 \cdot 7^5 \cdot 2^{15} \cdot 3^9 \cdot 5^9 = 2^{20} \cdot 3^9 \cdot 5^9 \cdot 7^5$: l'esponente più basso di 2 e 5 è 9;
4) $13^{103} \cdot 18^2 \cdot 5^{90} = 13^{103} \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^{90}$: l'esponente più basso di 2 e 5 è 2;
5) $25^3 \cdot 22^5 \cdot 3^{1100} = 5^6 \cdot 2^5 \cdot 11^5 \cdot 3^{1100}$ : l'esponente più basso di 2 e 5 è 5.

L'ordine crescente sarà allora: 4 - 5 - 2 - 3 - 1. La risposta è pertanto: 5231.




**10. UN POLIGONO [2100]**
Osservando la figura a lato, si nota che il poligono è costituito da 21 quadratini di area unitaria e pertanto l'area del poligono è 21. La risposta è, pertanto, 2100.

**11. CARAMELLE [0013]**
Se i sacchetti sono $n$, nella peggiore delle ipotesi essi contengono (a meno dell'ordine) il primo almeno una caramella, il secondo almeno due caramelle, il terzo almeno tre caramelle, e così via fino all'$n$-esimo sacchetto che contiene almeno $n$

caramelle; le caramelle contenute nei sacchetti sono quindi almeno $\frac{n(n+1)}{2}$. Il massimo valore di $n$ per cui $\frac{n(n+1)}{2} \leq 100$ è $n=13$.

**12. ARCHI DI CIRCONFERENZE [5625]**

L'arco di circonferenza del cerchio $C_1$ è $L=\frac{2\pi R}{6}$ mentre quello di $C_2$ è $l=\frac{2\pi r}{8}$. Poiché $L=l$ segue che $\frac{2\pi R}{6}=\frac{2\pi r}{8}$ cioè $\frac{R}{r}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ e quindi il rapporto tra le aree dei due cerchi è $\frac{\pi R^2}{\pi r^2}=\frac{9}{16}=0,5625$. La risposta è quindi 5625.

**13. QUADRATI MAGICI [2520]**

Indichiamo con a e b i due numeri incogniti della terza riga. Poiché la somma dei numeri su ogni riga e colonna è costante, deve essere 1+12+b+13=11+a+b+10, da cui a=5.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | | 1 | |
| | 9 | 12 | |
| 11 | a | b | 10 |
| | 16 | 13 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | c | 1 | d |
| | 9 | 12 | |
| 11 | 5 | b | 10 |
| | 16 | 13 | |

Analogamente, la somma dei numeri sulla prima riga e sulla seconda colonna è uguale, pertanto 14+c+1+d=c+9+5+16, da cui d=15.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | c | 1 | 15 |
| | 9 | 12 | |
| 11 | 5 | b | 10 |
| f | 16 | 13 | e |

Ancora, la somma dei numeri sulla diagonale secondaria deve essere uguale alla somma dei numeri sulla quarta riga, pertanto 15+12+5+f=f+16+13+e, da cui e=3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | c | 1 | 15 |
| g | 9 | 12 | h |
| 11 | 5 | b | 10 |
| f | 16 | 13 | 3 |

Prendendo la seconda riga e la quarta colonna, sarà g+9+12+h=15+h+10+3, da cui g=7.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | c | 1 | 15 |
| 7 | 9 | 12 | h |
| 11 | 5 | b | 10 |
| f | 16 | 13 | 3 |

Restano da inserire i numeri 2, 4, 6 e 8. L'unica possibilità affinché la somma di tutti i numeri su righe, colonne e diagonali sia costante (34) è che f=2, c=4, b=8, h=6.

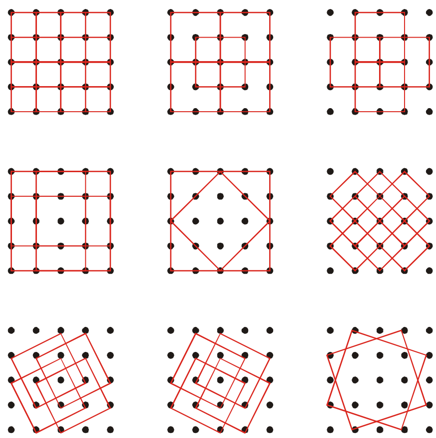
| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | 4 | 1 | 15 |
| 7 | 9 | 12 | 6 |
| 11 | 5 | 8 | 10 |
| 2 | 16 | 13 | 3 |

La risposta è pertanto: $4 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 6 = 2520$.

**14. ANCORA QUOZIENTI… [0096]**

Detto *n* il numero cercato, dai dati del problema risulta $n = 26q + 2q^2$. Ricordando che il resto di una divisione è strettamente minore del divisore, deve essere $2q^2 < 26$. Il valore massimo di $q$ per cui $2q^2 < 26$ è $q = 3$ e quindi $n = 26 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 96$.

**15. QUADRATI [0050]**



Possiamo costruire quadrati di lato 1, 4 in ciascuna riga su 4 righe; quadrati di lato 2, 3 in ciascuna riga su 3 righe; di lato 3, 2 su 2 righe e infine di lato 4 uno solo.

Poi vi sono i quadrati di lato $\sqrt{2}$ che sono in tutto 9 e quello di lato $2\sqrt{2}$.

Infine ci sono 8 quadrati di lato $\sqrt{5}$ e due di lato $\sqrt{10}$.

In totale: $16 + 9 + 4 + 1 + 9 + 1 + 8 + 2 = 50$

**16. MEZZO SECOLO DI QUESTI GIORNI… [0020]**

Ognuno degli 8 commensali ha brindato con 5 amici, quindi in totale ci sono stati $8 \cdot 5 = 40$ brindisi. Poiché, però, ogni brindisi tra 2 amici è contato due volte (se A brinda con B, nello stesso tempo B brinda con A), i brindisi sono stati $40 : 2 = 20$.

Questo è il ragionamento che si segue per contare il numero delle diagonali di un poligono di $n$ lati (e quindi $n$ vertici). Ogni vertice può essere collegato ai rimanenti $n-3$ vertici ad esso non consecutivi per formare una diagonale e pertanto in totale si avranno $n \cdot (n-3)$ diagonali.

Poiché ognuna di esse è contata due volte, il numero di diagonali distinte sarà $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

**17. UNA NUOVA OPERAZIONE [0095]**

Svolgendo l'espressione risulta:

[(3 # 2) # (4 # 5)] # (7 # 6) = $[(3^2-4) \# (4^2-10)] \# (7^2-12)$ = (5 # 6) # 37 = $(5^2-12) \# 37$ = $(13^2-74) = 95$.

**18. TRIANGOLI [0016]**

Se $\overline{EF} = 1 \Rightarrow \overline{ED} = 2$ e $\overline{AC} = 4$. Dato che i triangoli sono simili (rapporto di similitudine 4) e in triangoli simili le aree stanno tra loro come i quadrati di due lati omologhi, si avrà che $\frac{\text{Area}(ABC)}{\text{Area}(EFG)} = 16$.

**19. PARTITE DI TENNIS [0023]**

Nelle 5 somme totali l'età di ogni giocatore compare 4 volte e quindi $124+128+130+136+142=660$ è uguale a 4 volte la somma delle età di tutti i giocatori. Dunque la somma delle età dei 5 giocatori è $\frac{660}{4}=165$. Poiché la somma delle età dei 4 giocatori più anziani è 142, il giocatore più giovane ha 23 anni.

**20. SOLIDI INGRASSATI… [0118]**

Dette *a*, *b*, *c* le dimensioni del parallelepipedo, il suo volume sarà $V=abc$. Aumentando le dimensioni, il nuovo volume sarà:

$$\overline{V}=(a+\frac{20}{100}a)\cdot(b+\frac{30}{100}b)\cdot(c+\frac{40}{100}c)=\frac{6}{5}a\cdot\frac{13}{10}b\cdot\frac{7}{5}c=\frac{273}{125}abc=abc(1+\frac{148}{125})$$

Pertanto il volume è aumentato del $\frac{148}{125}\cdot 100\%=118,4\%$. La risposta è quindi 118.