1. BUON COMPLEANNO "S." [40]

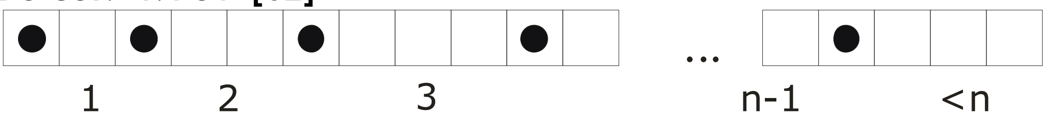
Per prima cosa osserviamo che $AA_9 = 9A + A = 10A$. L'età è un multiplo di 10.

In base 7, accade che $BB_7 = 7B + B = 8B$, quindi l'età è un multiplo di 8.

L'unico numero che soddisfa le richieste del problema è 40, in quanto $80 = 143_7$.

Per conferma $40 = 1111_3$

2. GIOCANDO CON I NIPOTI [62]



Per prendere n palline devo aver saltato complessivamente $1+2+3+...+n-1$ palline e dopo aver preso l'ultima me ne devono rimanere meno di n.
L'n cercato è il più grande numero per cui

$n + \frac{n(n-1)}{2} \le 2011$, cioè
$n(n+1) \le 4022$

Disequazione che può essere risolta calcolando come prima approssimazione la radice quadrata di 4022.
$n = 62$ è la soluzione cercata.

3. NUOVI GIOCHI [126]

La prima cosa che si osserva è che il numero centrale è 14, la seconda che non c'è bisogno di risolvere tutto il gioco, visto che la somma dei 9 numeri dovrà essere necessariamente $14 \cdot 9 = 126$.

5	**14**	**23**

4. AMICI LOQUACI [33]

Siano x il numero di invitati. Calcoliamo il numero di minuti medio ascoltato dagli invitati:

$$\frac{\frac{20}{100}x \cdot 60\,\text{min} + \frac{1}{2}\frac{70}{100}x \cdot \frac{1}{3}60\,\text{min} + \frac{1}{2}\frac{70}{100}x \cdot \frac{2}{3}60\,\text{min}}{x} = \frac{12x + 7x + 14x}{x}\text{min} = 33\,\text{min}$$

5. PROGRESSIONI DI PARENTI [1728]

Rappresentiamo i dati del problema a partire dalla progressione aritmetica:

$$\begin{array}{llll} a-k & a-8 & a+k & p.geo \\ a-k & a & a+k & p.ar \\ a-k & a & a+k+64 & p.geo \end{array}$$

Mettiamo a sistema le condizioni per le progressioni geometriche e risolviamo.

$\begin{cases} (a-8)^2 = (a-k)(a+k) \\ a^2 = (a-k)(a+k+64) \end{cases}$ $\begin{cases} k = 16 \\ a = 20 \end{cases}$ (unica soluzione accettabile)

Le tre età cercate sono 4, 12 e 36.

6. GIOCHI DI LUCE [61]
U dodecaedro ha 12 facce, 30 spigoli e 20 vertici.
I led installati sono quindi $12+30+20-1=61$

7. SOGNI FURFANTI [1342]
Supponiamo che almeno uno dei commensali sia Cavaliere (**C**), egli dice la verità, quindi al suo fianco c'è effettivamente un cavaliere ed un furfante (C-**C**-F). Il cavaliere, dicendo a sua volta la verità ci assicura di avere al suo fianco un furfante, oltre che il cavaliere dal quale siamo partiti, d'altra parte, il furfante, affinché la sua frase sia falsa, ci assicura di avere al suo fianco un altro cavaliere (F-C-**C**-F-C). Continuando il ragionamento ci si accorge che ogni 2 cavaliere deve essere seduto un furfante. Il numero massimo di cavalieri è quindi due terzi di 2013, cioè 1342.

8. ANGOLI INTERI [22]
Sia n il numero dei lati del poligono regolare.
La misura degli angoli interni α è data da

$$\alpha=\frac{180°\cdot(n-2)}{n}=\frac{180°\cdot n-360°}{n}=180°-\frac{360°}{n}$$

Che sarà un numero intero se n è un divisore di 360 (escludendo $n=1$ e $n=2$ che non formano alcun poligono regolare)
Calcoliamo il numero di divisori di 360.
$360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$
$d(360)=(3+1)(2+1)(1+1)=24$
I poligoni regolari con un angolo interno intero sono $24-2=22$.

9. CENA A LUME DI CANDELA [60]

Primo metodo
Numeriamo le posizioni in senso antiorario da 1 a 6, ed utilizziamo le iniziali A per azzurro e B per bianco per indicare le candele.
Fisso un colore… ad esempio l'Azzurro e lo metto in posizione 1. Questo modo di procede mi elimina il problema di dover considerare tutte le rotazioni.
Mi scrivo tutte le possibilità.

1	2	3	4	5	6	analisi della posizione
A	A	A	B	B	B	3 unite
A	A	B	A	B	B	2 unite
A	A	B	B	A	B	2 unite
A	A	B	B	B	A	3 unite (1-2-6)
A	B	A	A	B	B	2 unite
A	B	A	B	A	B	tutte alternate
A	B	A	B	B	A	2 unite (1 e 6)
A	B	B	A	A	B	2 unite
A	B	B	A	B	A	2 unite (1 e 6)
A	B	B	B	A	A	3 unite (1-5-6)

Probabilità cercata: $P(2\text{ unite})=\frac{6}{10}=60\%$

Secondo metodo

Calcoliamo la probabilità per differenza tra

$P(2\text{ unite}) = 1 - P(\text{tutte unite}) - P(\text{tutte separate})$

$P(\text{tutte separate}) = 1 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

la prima la metto dove voglio, la seconda ha due posti possibili, la terza deve andare nell'unico posto che completa l'alternanza.

$P(\text{tutte unite})$ se la prima la scelgo come mi pare, per la seconda devo valutare due possibilità:

$P(\text{tutte unite}) = P(1) + P(2)$

$P(1) = 1 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$

la prima la metto dove voglio, la seconda la metto a fianco della prima (2 possibilità su 5) e la terza a fianco di una delle due (2 possibilità su 4)

$P(2) = 1 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

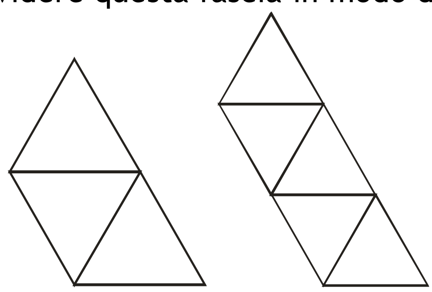
La prima la metto dove voglio, la seconda la metto ad uno spazio di distanza dalla prima (2 su 5) e la terza la devo mettere nello spazio che prima ho saltato (1 su 4)

$P(\text{tutte unite}) = P(1) + P(2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

$P(2\text{ unite}) = 1 - P(\text{tutte unite}) - P(\text{tutte separate}) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 60\%$

10. UNA TORTA TRIANGOLARE [2350]

Con un taglio, parallelo ad uno dei lati ottengo 1 triangolo equilatero ed una fascia. Analizziamo come è possibile dividere questa fascia in modo da ottenere triangoli equilateri.



Le divisioni possibili sono tutte fatte da numeri dispari di triangoli equilateri.

Ora, escluso 2, possiamo ottenere qualunque numero n pari effettuando un'opportuna divisione di una di queste fasce in $n-1$ triangoli.

Per i numeri dispari, non è possibile ottenere né 3 né 5, ma da 7 in su possiamo combinare 2 di queste divisioni per ottenerli tutti.

Infatti $7 = 1+3+3$, $9 = 1+3+5$, $11 = 1+3+7$ e via di seguito.

La soluzione è quindi 2350

11. EQUAZIONI DAL PASSATO [120]
Abbiamo una equazione del tipo $a^b = 1$.
Le possibili soluzioni di un'equazione del genere sono:

$a^0 = 1 \Leftrightarrow a \neq 0$ $\quad x^2 - 2 = 0 \quad x = \pm\sqrt{2}$ (2 soluzioni entrambe buone)

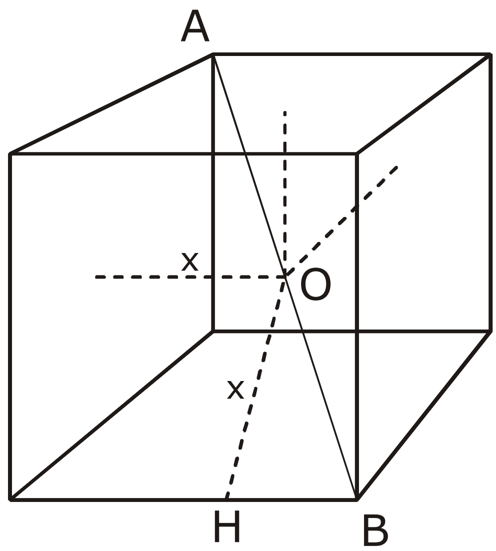
$1^b \ \forall b \in \Re \quad \frac{x^2 - 5x}{6} = 1 \quad x^2 - 5x - 6 = 0 \quad x = -1 \ x = 6$ (2 soluzioni entrambe buone)

$(-1)^n$ con $n \in N$, n pari. $\frac{x^2 - 5x}{6} = -1 \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x = 3 \quad x = 2$

L'esponente per $x = 3$ è 7, dispari, e quindi non accettabile.
L'esponente per $x = 2$ è 4, pari, e quindi accettabile.

Il numero si soluzioni trovate è 5 e il loro prodotto è $\sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right) \cdot (-1) \cdot 6 = 24$
$24 \cdot 5 = 120$.

12. SOLIDI REGALI [585]
Sia O il centro della sfera ed l il lato del cubo. Ovviamente O dovrà appartenere alla diagonale AB del cubo.



Consideriamo il triangolo OBH. Esso è formato da $OH = x$ per ipotesi, $OB = \sqrt{3}l - \sqrt{3}x = \sqrt{3}(l - x)$ in quanto AO è la diagonale del cubo di spigolo x e $HB = l - x$.

Il triangolo OBH è rettangolo per ipotesi, quindi i suoi lati verificano il teorema di Pitagora:

$$x^2 + (l - x)^2 = 3(l - x)^2$$
$$x^2 = 2(l - x)^2$$
$$x = \sqrt{2}(l - x)$$
$$(\sqrt{2} + 1)x = \sqrt{2}l$$
$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} l$$
$$x = (2 - \sqrt{2})l$$

Inserendo i dati del problema
$x = (2 - \sqrt{2}) \cdot 1000 \text{ mm} \cong 585{,}8 \text{ mm}$

13. SOMME FATTORIALI [1000]
Osserviamo che
$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$, quindi

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots = 1$$

14. L'EREDITÀ DELLO ZIO [5420]

Sappiamo che $1+k+k^2+\ldots+k^{2010} = \frac{1-k^{2011}}{1-k} = 2000$ e che

$1+k+k^2+\ldots+k^{4021} = \frac{1-k^{4022}}{1-k} = 3800$.

Osserviamo che $\frac{1-k^{4022}}{1-k} = \frac{(1-k^{2011})(1+k^{2011})}{1-k} = 3800$, da cui segue

$2000 \cdot (1+k^{2011}) = 3800$, cioè $k^{2011} = \frac{9}{10}$

Ora:

$$1+k+k^2+\ldots+k^{6032} = 1+k+k^2+\ldots+k^{2010} + k^{2011}(1+k+k^2+\ldots+k^{4021}) = 2000 + \frac{9}{10}\cdot 3800 = 5420$$

15. CARTA DA PACCHI [2113]

$$2^{22}+1 = 2^{22}+2\cdot 2^{11}+1-2\cdot 2^{11} = \left(2^{11}+1\right)^2 - 2^{12} = \left(2^{11}+1-2^6\right)\left(2^{11}+1+2^6\right) = 1985\cdot 2113 = 5\cdot 397\cdot 2113$$

16. LA *SACHERTORTE* [201]

Analizziamo la successione partendo da due valori arbitrari:

Siano $t_1 = a$ $t_2 = b$ Scriviamoci i termini seguenti $t_n = \frac{1+t_{n-1}}{t_{n-2}}$:

$$t_3 = \frac{b+1}{a}$$

$$t_4 = \frac{1+\frac{b+1}{a}}{b} = \frac{a+b+1}{ab}$$

$$t_5 = \frac{1+\frac{a+b+1}{ab}}{\frac{b+1}{a}} = \frac{ab+a+b+1}{b(b+1)} = \frac{(a+1)(b+1)}{b(b+1)} = \frac{a+1}{b}$$

$$t_6 = \frac{1+\frac{a+1}{b}}{\frac{a+b+1}{ab}} = \frac{ab(a+b+1)}{b(a+b+1)} = a$$

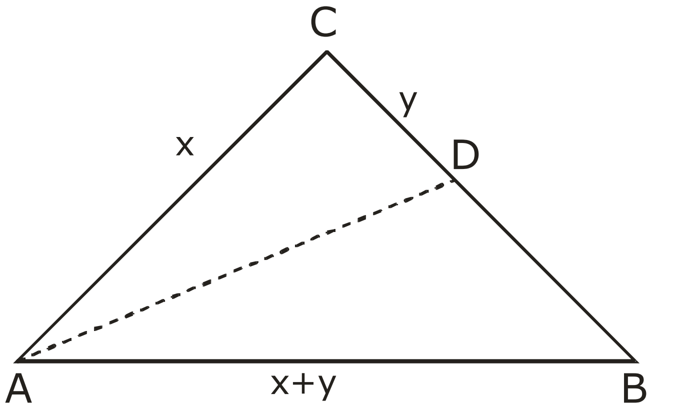
$$t_7 = \frac{1+a}{\frac{a+1}{b}} = b$$

La successione è periodica di periodo 5 ($t_1 = t_6 = t_{5n+1}$).

$t_{146} = t_1 = 201{,}1$

17. GEMELLI GEOMETRI 1 [5400]

Primo metodo



Chiamando $AC = x$ e $CD = y$ e applicando il teorema della bisettrice, si osserva che

$\frac{y}{x-y} = \frac{x}{x+y}$, cioè

$xy + y^2 = x^2 - xy$

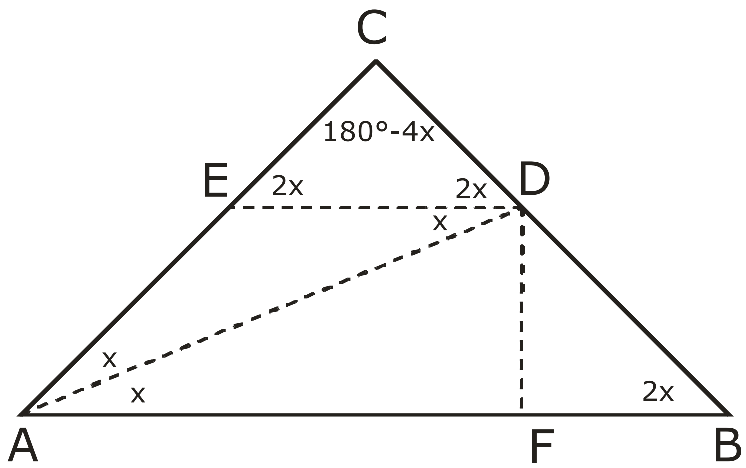
$x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2$

$(x+y)^2 = 2x^2$

$x + y = \sqrt{2}x$

Quindi il triangolo è rettangolo isoscele e $A\hat{C}B = 90°$

Secondo metodo



Sia $DE // AB$ e sia F tale che $AC = AF$, ne segue immediatamente che $FB = CD$ per la condizione del problema.

Sia x la metà dell'angolo in $\hat{A}$. Riportiamo le informazioni conosciute sugli angoli nella figura.

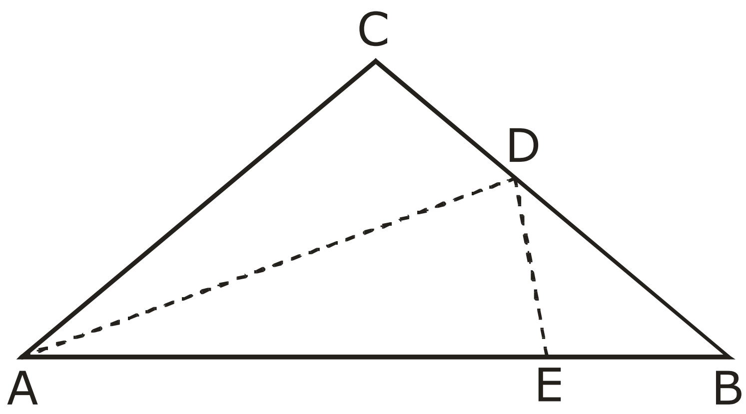
Si osserva che AED è isoscele e quindi $AE = ED = DB$.

Ora i triangoli CED e DFB sono congruenti in quanto hanno due lati e l'angolo compreso congruenti. Ne segue che $D\hat{F}B = A\hat{C}B$.

Ma anche i triangoli ADF e ADC sono congruenti in quanto hanno i tre lati a due a due congruenti, quindi $A\hat{C}D = D\hat{F}A$. Di conseguenza $ACD = AFD = DFB = 90°$

18 GEMELLI GEOMETRI 2 [6000]

Primo metodo

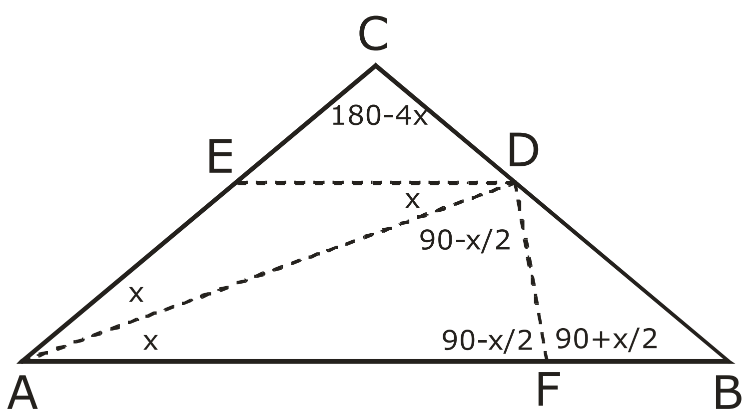


Scegliamo E tale che $AE = AD$, quindi $BE = CD$.

Per il Teorema della Bisettrice $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$, quindi $\frac{BE}{BD} = \frac{AC}{AB}$; gli angoli $C\hat{A}B$ e $D\hat{B}E$ sono congruenti quindi i triangoli ABC e BDE sono simili e l'angolo $A\hat{C}B = D\hat{E}B$.

Sia $x = A\hat{C}B = D\hat{E}B$; allora $D\hat{A}E = 45° - \frac{x}{4}$ e $D\hat{E}A = \frac{135°}{2} + \frac{x}{8}$ visto che ADE è isoscele; $D\hat{A}E + D\hat{E}B = 180°$ ovvero $\frac{135°}{2} + \frac{x}{8} + x = 180°$ da cui $x = 100°$

Secondo metodo



Indichiamo con x la metà dell'angolo in $\hat{A}$. Tracciamo $DE // AB$ e sia F su AB tale che $AF = AD$.

Si osserva che per costruzione il triangolo ECD è isoscele così come pure ADE.

Dimostriamo che i triangoli DFB e ECD sono congruenti:

essi hanno $ED = DB$ in quanto $DB = AE = ED$;

$FB = CD$ per costruzione (del punto F e per la condizione data dal problema)

Gli angoli $F\hat{B}D = E\hat{D}C$ per costruzione.

Per il primo criterio di congruenza dei triangoli sono congruenti, quindi gli angoli $E\hat{C}D = D\hat{F}B$.

$180° - 4x = 90 + \frac{x}{2}$ $\qquad$ $\frac{9}{2}x = 90°$ $\qquad$ $x = 20°$ e l'angolo $E\hat{C}D = 100°$.

19. RICATTI DA MATEMATICO [1332]

Primo metodo

Sia $\frac{px}{x+p} = k$ con k intero positivo.

$px = pk + xk \qquad (p-k)x = pk \qquad \Rightarrow \qquad p \mid (p-k)x \qquad p \mid px - kx$

Ora abbiamo 2 possibilità: $p \mid k$ oppure $p \mid x$

- $p \mid k$

Allora $\exists h$ intero $h \geq 1$, tale che $k = hp$

$\frac{px}{x+p} = hp \qquad \frac{x}{x+p} = h \qquad x = hx + hp \qquad x(1-h) = hp$

Ora nell'ultima uguaglianza abbiamo che a destra c'è un numero positivo, mentre a sinistra c'è un numero negativo,a meno che $h = 1$, nel qual caso $p = 0$ che non è accettabile.

- $p \mid x$

Allora $\exists h$ intero $h \geq 1$, tale che $x = hp$

$\frac{p^2 h}{hp + p} = k \qquad \frac{ph}{h+1} = k$

Ma $h+1$ e h sono primi tra loro, quindi $h+1 \mid p$.
Essendo p primo e non potendo essere $h+1 = 1$, $h+1$ deve necessariamente essere uguale a p. $h+1 = p \qquad h = p-1$
Quindi $x = p(p-1)$

Cerco quindi il più piccolo numero primo, il cui prodotto con il suo precedente sia un numero di 4 cifre.
Per $p = 37 \qquad x = 37 \cdot 36 = 1332$

Secondo metodo

Siccome p e x sono numeri positivi,

$\frac{px}{x+p} < \frac{px}{x} = p \qquad \Rightarrow \qquad \frac{px}{x+p} = p - k$ con $1 \leq k < p$

Distinguiamo 2 casi:

- $k = 1$

$\frac{px}{x+p} = p - 1 \qquad px = px + p^2 - x - p \qquad x = p(p-1)$

Cerco quindi il più piccolo numero primo, il cui prodotto con il suo precedente sia un numero di 4 cifre.
Per $p = 37 \qquad x = 37 \cdot 36 = 1332$

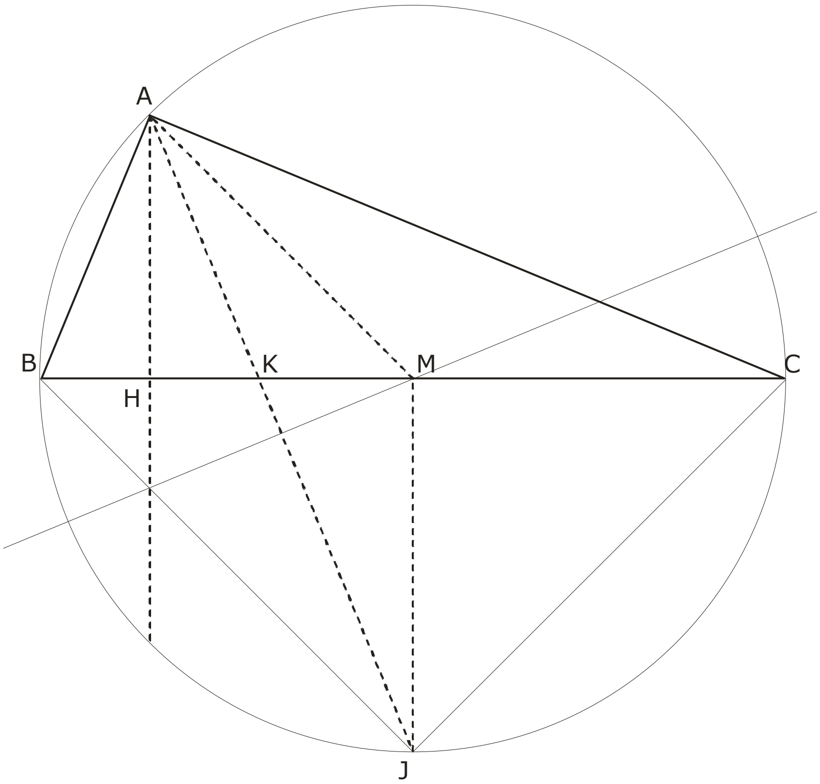
- $2 \leq k < p$

$\frac{px}{x+p} = p - k \qquad px = px + p^2 - kx - kp \qquad kx = p^2 - kp \qquad x = \frac{p(p-k)}{k}$

Ma essendo p primo, k non può dividere p e nemmeno $p-k$, quindi questa situazione è impossibile.

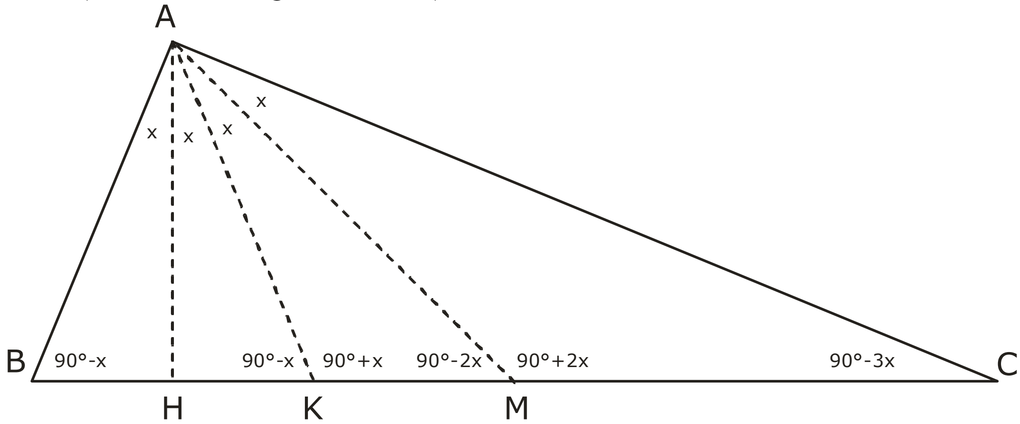
20. UNA FETTA SPECIALE [4050]

Primo metodo (usando la geometria euclidea)



Tracciamola circonferenza circoscritta al triangolo ABC. Prolungo la bisettrice AK fino ad incontrare la circonferenza in J. Per il teorema della corda, $BJ = CJ$, quindi il triangolo BJC è isoscele e la retta che passa per MJ risulta essere l'asse del segmento BC. Ora $AH \perp BC$ per ipotesi e $MJ \perp BC$ in quanto asse di BC, quindi $AH // MJ$ e $H\hat{A}K = K\hat{J}M$. Il triangolo AMJ risulta quindi isoscele con $AM = MJ$. M risulta appartenere contemporaneamente all'asse della corda BC e all'asse della corda AJ. M è dunque il centro della circonferenza, quindi il triangolo ABC è rettangolo in $\hat{A}$. L'angolo in $\hat{B}$ misura $90° - \frac{90°}{4} = 67{,}5° = 4050'$

Secondo metodo (usando la trigonometria)



Sia x la quarta parte dell'angolo in $\hat{A}$. Dopo aver riportato la misura degli angoli in funzione di x (come in figura), considero i triangolo BAM e MAC sui quali applico il teorema dei seni:

$$\frac{BM}{\text{sen}3x} = \frac{AM}{\text{sen}(90° - x)} \qquad \frac{MC}{\text{sen}x} = \frac{AM}{\text{sen}(90° - 3x)}$$

$$\frac{BM}{\text{AM}} = \frac{\text{sen}3x}{\cos x} \qquad \frac{MC}{\text{AM}} = \frac{\text{sen}x}{\cos 3x}$$

Ma $BM = MC$, quindi

$$\frac{\text{sen}3x}{\cos x} = \frac{\text{sen}x}{\cos 3x} \qquad \text{sen}\,3x\cos 3x = \text{sen}\,x\cos x \qquad \text{sen}\,6x = \text{sen}\,2x$$

Ora, siccome $0 < 4x < 180°$ implica che $0° < x < 45°$, segue che l'unica soluzione accettabile per l'equazione sopra riportata è

$6x = 180° - 2x$, da cui segue che $x = \frac{180°}{8} = \frac{45°}{2}$

L'angolo in $\hat{B}$ misura dunque $90° - 22{,}5° = 67{,}5° = 67{,}5° \cdot 60 = 4050'$