

1) La scala musicale [556]

Se indichiamo con x il numero di scalini l'equazione da risolvere è $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x + 40 = \frac{25}{16}x$ da cui si ricava $x = 128$.

Gli scalini fatti sono: 96 in salita, 96 in discesa, 64 in salita, 54 in discesa, 118 in salita, 128 in discesa. In tutto 556.

2) La leva [1482]

CH = 10 m C'H' = 3 m CC' = 25 m CK = 7 m CO = 20 m

Applicando il teorema di Pitagora si calcolano

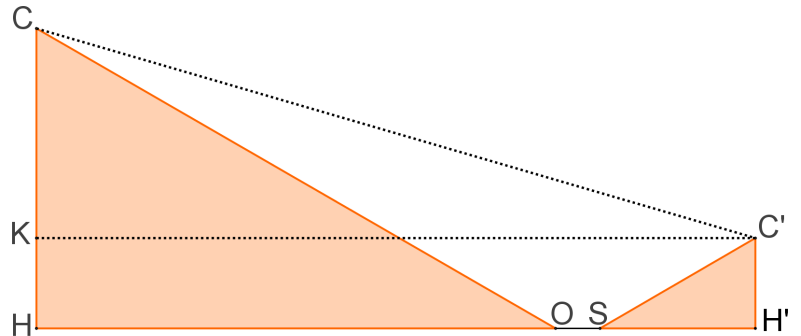
$$KC' = HH' = 24 \text{ m} \quad HO = 10\sqrt{3}$$

Per la similitudine tra i triangoli CHO e C'SH':

$$SH' = 3\sqrt{3}$$

$$OS = HH' - (HO + SH')$$

$$OS = (24 - 13\sqrt{3}) \text{ m} \approx 1,4827 \text{ m} \approx 1482 \text{ mm}$$



3) I due marinai [4]

I casi possibili sono 6, i casi favorevoli 2. La probabilità è $1/3$, la soluzione è 4.

4) Il piccolo naviglio [1515]

nono giorno: 1 pesce ottavo giorno: $2(1 + 1) = 4$ settimo giorno: $2(4 + 1) = 10$

e continuando così: 22, 46, 94, 190, 382, 766. In tutto i pesci pescati sono 1515.

5) Le palle di cannone [816]

Il numero delle palle di cannone in ogni strato della piramide è un numero triangolare: 1, 6, 10, 15,.... La somma dei primi n numeri triangolari è un numero tetraedrico. L' n -esimo numero tetraedrico si trova con la seguente formula

$$t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$$

Bisogna quindi calcolare il 16-esimo numero tetraedrico $t_{16} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{6} = 16 \cdot 17 \cdot 3 = 816$

6) I due legionari [36]

Il percorso è costituito da 8 semicirconferenze di raggio 1 km e da 7 semicirconferenze di raggio mezzo chilometro.

$$8\pi \cdot 1 + 7\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{2}\pi \approx 11,5 \cdot 3,1416 = 36,1284$$

36 km

7) Cena con sorpresa [21]

x : numero dei commilitoni che scelgono il menu a 14 \$

y : numero dei commilitoni che scelgono il menu a 18 \$

$$14(x + 2) + 18y = 378 \quad 14x + 18y = 350$$

$$x = 25 - \frac{9}{7}y$$

y deve essere multiplo di 7 e maggiore di x :

a) $y = 7$ $x = 16$ non accettabile perché $y < x$ b) $y = 14$ $x = 7$ c) $y = 21$ $x = -2$ non accettabile

L'unica soluzione possibile è la b). Il numero dei commilitoni è 21.

8) Arrivedorci! [450]

I 6 vicini ripetono ciascuno 20 volte la parola arrivederci con due e. In tutto $6 \times 20 \times 2 = 240$. I due ripetono, alternandosi, $1 + 2 + 3 + \dots + 20$ volte la parola arrivedorci con una e. In tutto 210 e. Il totale è 450.

9) All'università [1]

$$\begin{cases} x - 7y + 8z = 4 \\ 8x + 4y - z = 7 \end{cases} \quad \text{moltiplicando per 8 la prima equazione} \quad \begin{cases} 8x - 56y + 64z = 32 \\ 8x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

e sottraendo membro a membro si ottiene $-60y + 65z = 25$ e semplificando $-12y + 13z = 5$ da cui si ricava

$$y = \frac{13z - 5}{12}$$

quindi sostituendo nella $x - 7y + 8z = 4$ si ricava $x = \frac{13 - 5z}{12}$

Adesso si può calcolare

$$x^2 - y^2 + z^2 = \left(\frac{13 - 5z}{12}\right)^2 - \left(\frac{13z - 5}{12}\right)^2 + z^2 = \dots = 1$$

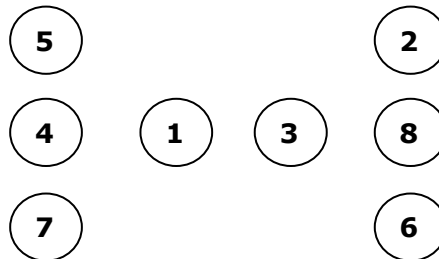
10) Corso base [19]

Se d è il MCD fra a, b, c , devono esistere tre interi dispari e distinti x, y e z tali che: $a = xd$ $b = yd$ $c = zd$

I più piccoli valori possibili per x, y, z sono, a meno dell'ordine, $x = 1, y = 3, z = 5$. Poiché $c = 5d < 100$ si ha $d \leq 19$. In effetti $a = 19, b = 57, c = 95$ rappresentano una terna che soddisfa le condizioni date con $d = 19$.

11) Da 1 a 8 [16]

Il valore massimo per k è 16

**12) Che genio! [126]**

Ogni terna pitagorica primitiva è generata da due interi p e q tali che

$$a = p^2 - q^2$$

$$b = 2pq$$

$$c = p^2 + q^2$$

Poiché il lato che conosciamo è dispari potrebbe essere

$$a) p^2 - q^2 = 45 \quad \text{oppure} \quad b) p^2 + q^2 = 45$$

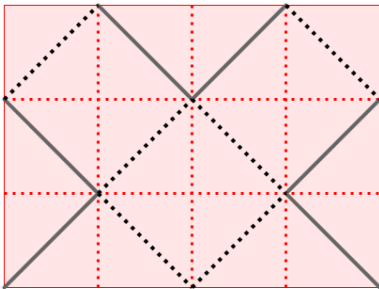
Nel caso a) $p = 7$ e $q = 2$. Troviamo che $a = 45$ $b = 28$ e $c = 53$

Nel caso b) $p = 6$ e $q = 3$ ma non sono primi tra loro

La risposta è: $a + b + c = 126$

13) I figli del deserto [99]

Si sa che almeno uno è scapolo e che se si sceglie una qualsiasi coppia almeno uno è sposato. Ciò significa che se si prende quello scapolo e lo si abbina con un qualsiasi altro "figlio del deserto" questo deve essere per forza sposato, ma ciò significa che c'è un solo scapolo, e poiché quelli sposati sono 98, in tutto i partecipanti sono 99.



14) Il regalo [4]

Il lato del cubo misura $10\sqrt{2}$ cm che corrisponde esattamente alla misura della diagonale di ciascuno dei 12 quadrati di lato 10 cm in cui si può dividere il rettangolo. Tagliando secondo le linee grigie continue in figura e piegando lungo le linee grigie tratteggiate si ottengono 4 pezzi. Con il più grande si ricoprono tre facce e tre metà. Con i restanti tre pezzi si completano le tre facce.

15) Stanlio ed Ollio [30]

Gli astemi sono $64 - (32 + 15 + 3) - (12 - 8) = 10$
 Le bottiglie da preparare sono 30

16) Il proibizionismo [3142]

Le lattine sono allineate nel modo illustrato in figura.

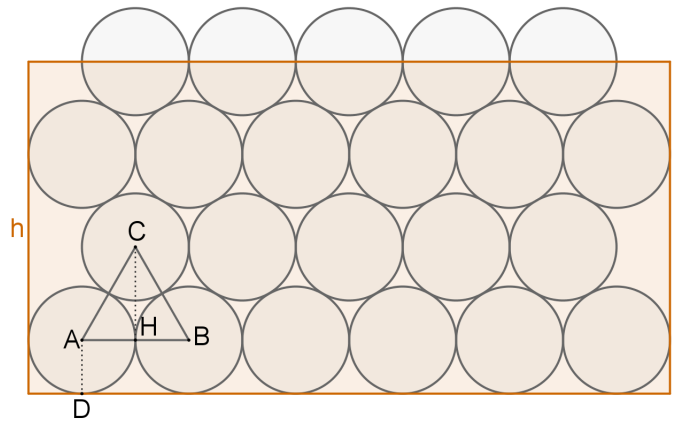
Prima bisogna calcolare l'altezza h della cassa

$AB = BC = AC = 8 \text{ cm}$

$CH = BC \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

$h = AD + 3 CH = (4 + 12\sqrt{3}) \text{ cm}$

$V_{\text{cassa}} = 48 \cdot 15 \cdot (4 + 12\sqrt{3}) \text{ cm}^3 = (2880 + 8640\sqrt{3}) \text{ cm}^3$



$V' = \left(17 + \frac{5}{2}\right) \cdot 16\pi \cdot 15 \text{ cm}^3 = 4680\pi \text{ cm}^3$ volume delle lattine interamente contenuto nella cassa
 $V_{\text{perso}} = V_{\text{cassa}} - V' = (2880 + 8640\sqrt{3} - 4680\pi) \text{ cm}^3 \approx 3142,656 \text{ cm}^3$

17) Il Tigre [1004]

Si può applicare la funzione di Eulero. Sapendo che $2012 = 2^2 \cdot 503$

$\varphi(2012) = 2012 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{503}\right) = 2012 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{502}{503} = 1004$

18) I due evasi [1500]

Siano

V_0 : velocità di esecuzione di Ollio V_S : velocità di esecuzione di Stanlio

x: ore di lavoro fino a mezzogiorno

$(V_0 + V_S)x = 0,5$ frazione di staccionata dipinta da entrambi fino a mezzogiorno

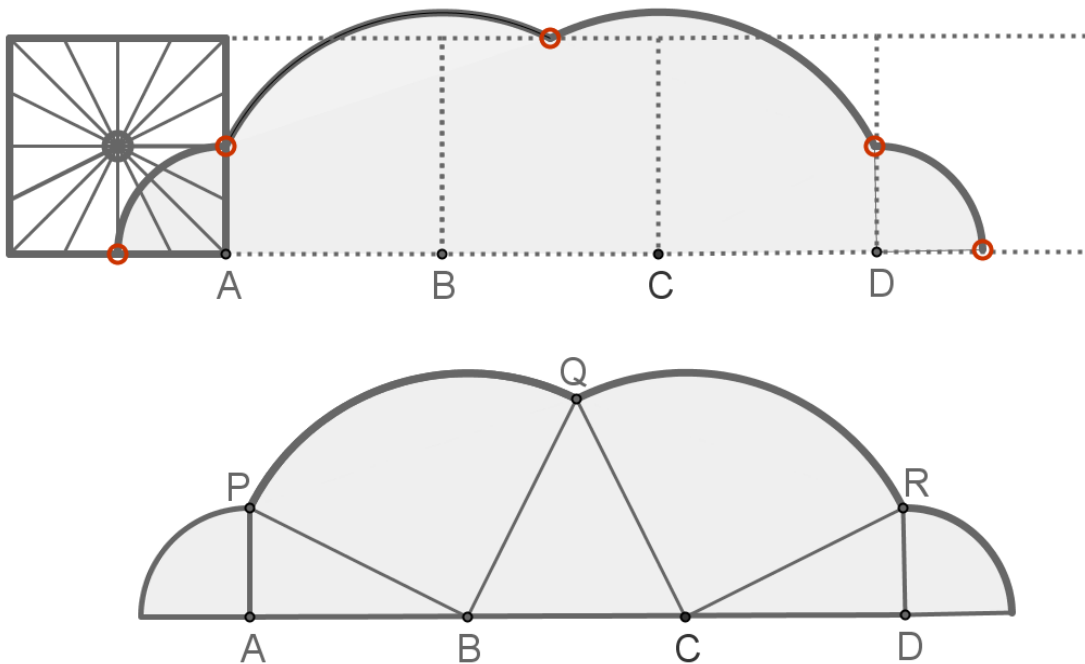
$4V_0 + 9V_S = 0,5$ frazione di staccionata dipinta da entrambi dopo mezzogiorno

$V_0x + 4V_0 = 0,5$ frazione di staccionata dipinta da Ollio

Da cui si ricava $x = 6$ ore.

Da ciò segue che in tutto i due imbianchini hanno lavorato 25 ore (10 Ollio e 15 Stanlio), cioè 1500 minuti.

19) L'invenzione della ruota! [5369]



Il percorso è costituito da due quarti di circonferenza di raggio 20 cm e da due quarti di circonferenza di raggio $20\sqrt{5}$. La regione che sta sotto la linea è costituita da:
 due quarti di cerchio di raggio 20 cm la cui area è $200 \pi \text{ cm}^2$
 due quarti di cerchio di raggio $20\sqrt{5}$ la cui area è $1000 \pi \text{ cm}^2$
 due triangoli rettangoli di cateti 20 e 40 cm la cui area è 800 cm^2
 un triangolo isoscele di base e altezza entrambi di 40 cm la cui area è 800 cm^2
 L'area totale è $(1600 + 1200 \pi) \text{ cm}^2 \approx 5369,92 \text{ cm}^2$

20) I due commercianti [19]

Se indichiamo con $a < b < c$ rispettivamente i costi delle tre radio dovrà essere

$$b > \frac{4}{3}a \quad c > 2b \quad c < 3a \quad \text{perci\`o} \quad a + \frac{4}{3}a + \frac{8}{3}a < 100 \quad 5a < 100 \quad a < 20$$

Nell'ipotesi $a = 18 \rightarrow c < 54 \rightarrow b < 27$ impossibile che la loro somma sia 100

Rimane come unica ipotesi $a = 19 \rightarrow c < 57$

$$c = 56 \rightarrow b = 25 \text{ impossibile perch\`e } b < \frac{4}{3}a$$

$$c = 55 \rightarrow b = 26 \text{ si}$$

$$c = 54 \rightarrow b = 27 \text{ impossibile perch\`e } c = 2b$$

21) In rotta verso la felicit\`a [610]

Partendo dall'ipotesi che il primo giorno dica il falso allora il secondo e il quarto dice la verit\`a e ci\`o porta ad affermare che la collina \`e alta 530 metri e la montagna 1210 metri. Ma ci\`o \`e in contraddizione con l'affermazione del sesto giorno in cui dovrebbe dire la verit\`a.

\`E dunque giusta l'ipotesi opposta e sono vere le affermazioni del primo e del terzo giorno da cui si ricava che i due rilievi misurano 1200 e 590 metri. La differenza \`e 610 metri.

Quesito	Soluzione
1 La scala musicale	0556
2 La leva	1482
3 I due marinai	0004
4 Il piccolo naviglio	1515
5 Le palle di cannone	0816
6 I due legionari	0036
7 Cena con sorpresa	0021
8 Arrivedorci!	0450
9 All'università	0001
10 Corso base	0019
11 Da 1 a 8	0016
12 Che genio!	0126
13 I figli del deserto	0099
14 Il regalo	0004
15 Stanlia ed Ollio	0030
16 Il proibizionismo	3142
17 Il Tigre	1004
18 I due evasi	1500
19 L'invenzione della ruota!	5369
20 I due commercianti	0019
21 In rotta verso la felicità	0610