

## SIMULAZIONE GARA A SQUADRE ON-LINE (2/3/2009)

### Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale  $x$  è il più grande intero minore od uguale ad  $x$ .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\sqrt{3} = 1,7321$$

$$\sqrt{6} = 2,4495$$

$$\pi = 3,1416$$

*“La bellezza matematica è una qualità che non può essere definita, non più di quanto la bellezza possa essere definita per l'arte, ma chi studia matematica, di solito, non ha difficoltà ad apprezzarla.”*

Paul Adrien Maurice Dirac

**NON APRIRE QUESTO FASCICOLO**

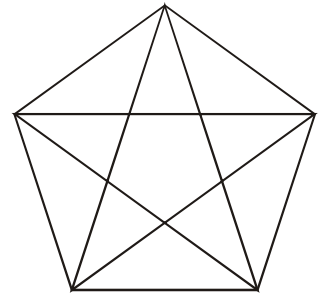
**FINO A QUANDO LA GARA NON È INIZIATA**

L'ispettrice Anne Marie Le Blanc,  
il suo collaboratore Maurice Dirac  
e il perfido Zeno Koseno  
vi danno il benvenuto a questa sfida Matematica.

Buon divertimento a tutti

## 1. IL PENTACOLO

Il malvagio Zeno Koseno si diverte a sfidare l'ispettrice Anne Marie Le Blanc ogni volta che può. Oggi è arrivato all'ispettorato di Parigi il seguente messaggio: Ruberò la Gioconda tra esattamente tanti giorni quanti sono i triangoli rappresentati in figura. Fra quanti giorni l'ispettrice manderà i suoi uomini a sorvegliare la Gioconda?



## 2. IL COMPLICE

Dopo l'arresto di un complice di Zeno, perquisendolo è stato trovato un foglietto con la seguente scritta: "Rue de la Paix Z. Su un triangolo rettangolo di cateti 28 e 45 tracciare tre circonferenze, centrate nei vertici del triangolo, a due a due tangenti fra loro. Z è il raggio della circonferenza più grande."

## 3. FURTI AL LOUVRE

Diversi e ripetuti furti si sono verificati recentemente al Museo del Louvre: sono scomparsi antichi reperti risalenti ai primi secoli dopo Cristo. L'ispettrice Le Blanc è già sul posto per le indagini: scopre che al posto del primo reperto è presente la disequazione  $a^{(b^c)} < 2009$ , firma inconfondibile di Zeno Koseno. Dirac osserva che il ladro ha rubato i reperti uno al giorno, partendo dai più antichi e che ogni reperto rubato risaliva ad un anno le cui tre cifre a, b e c (tutte maggiori di 1) verificano la disequazione trovata. Anne Marie afferma "So qual è il prossimo e ultimo obiettivo di Zeno Koseno: Maurice, mettilo al sicuro!". A quale anno risale l'ultimo reperto che Zeno Koseno intende rubare?

## 4. VERBALE

L'assistente Dirac è intento a stendere un verbale di furto: "Rubati 30 volatili dal negozio di Bernard. Valore della refurtiva: tre passeri valore 1 euro; due tortore valore 1 euro; un colombo valore 2 euro. Valore complessivo 30 euro." Quanti uccelli sono stati rubati di ciascuna specie? (Dare come risposta il prodotto dei tre numeri trovati.)

## 5. CONTRABBANDO

"Questa volta Zeno ha esagerato. Contrabbandare diamanti nelle scatole per cioccolatini destinati ai bambini di Parigi è troppo." Commenta l'ispettrice Le Blanc descrivendo ai suoi colleghi l'ultima scoperta. Zeno ha ricavato nel fondo di una scatola a forma di triangolo  $ABC$  un secondo triangolo  $A'B'C'$  dove ha nascosto dei diamanti grezzi di contrabbando. Se i punti  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  (rispettivamente sui lati  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$ ) sono tali che  $AA' = \frac{1}{5}AB$ ,  $BB' = \frac{1}{5}BC$ ,  $CC' = \frac{1}{5}AC$ , qual è il rapporto tra le aree dei triangoli  $A'B'C'$  e  $ABC$ ? (Scrivere di seguito numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)

## 6. LA COMBINAZIONE

Dirac ne ha combinata un'altra delle sue: dopo aver chiuso i documenti dell'ultima indagine in cassaforte ne ha modificato la combinazione e se l'è dimenticata. Spiega all'ispettrice Le Blanc di aver scelto uno strano numero a 10 cifre nel quale ogni cifra in posizione  $i$ -esima a partire da sinistra (dove la prima posizione è la posizione 0) indica quante volte la cifra  $i$  appare nel numero (ad esempio se il numero cominciasse per 3215... il valore 3 al primo posto indica che la cifra 0 compare all'interno del numero di dieci cifre 3 volte; il valore 2 indica che la cifra 1 compare nel numero 2 volte etc...). Le Blanc ci pensa un attimo e poi apre la cassaforte. Quel è la combinazione (Indicare le prime 4 cifre (da sinistra) del numero trovato.)

## 7. BUGIE

Dirac arriva tardi al lavoro. Interrogato da Le Blanc sostiene di essere partito con la sua Lancia Delta da casa lungo la strada statale dietro allo scuolabus. Purtroppo sul suo tragitto ci sono ben 7 incroci e ad ognuno di questi tra ogni vettura proveniente dalla statale e l'auto che la segue si sono inserite altre due vetture provenienti dall'incrocio (di destra). Le Blanc capisce subito che si tratta di una bugia, infatti pone al suo sventurato assistente la seguente domanda: "Ma sai quante vetture separano le tua automobile dallo scuolabus alla fine del lungo e tortuoso percorso?"

## 8. IL REGALO

Per il compleanno dell'ispettrice, Dirac ha preparato una scatola a forma di parallelepipedo con base quadrata in cui ogni spigolo ha lunghezza (in cm) pari a un numero intero; inoltre il valore della superficie totale (in  $cm^2$ ) è uguale a quello del volume (in  $cm^3$ ). L'assistente ha fatto in modo che la scatola sia il più grande parallelepipedo avente questa proprietà!. Qual è il volume della scatola?

## 9. COMPLEANNI

“Oggi mia figlia festeggia il suo dodicesimo compleanno; oggi è anche il compleanno di mia moglie (che ha meno di 50 anni) e di mia suocera. Comprerò un set da 10 candeline, che raffigurano i numeri da 0 a 9: metterò due candeline su ciascuna delle tre torte. Quest'anno un unico set di candele mi basterà per tutte e tre le torte; lo stesso accadrà l'anno prossimo e anche il successivo. Arrivati a questo punto tutte le cifre da 0 a 9 saranno state utilizzate almeno una volta. L'anno seguente, invece, dovrò comprare due set di candeline.” Alla fine Dirac chiede: “Ispettrice, mi sa dire qual è la somma delle età di mia figlia, di mia moglie e di mia suocera?”

## 10. PROBABILITÀ E INDIZI

Anna Marie oggi è felice e quando vede Dirac afferma: “La probabilità che oggi Zeno ci scappi è pari alla probabilità che hai tu di vincere o pareggiare tirando un solo dado a sei facce mentre io ne lancio due sommandone i valori”. (Espressa la probabilità come frazione  $p/q$  ridotta ai minimi termini, indicare come risultato  $p+q$ .)

## 11. MUCCHE PAZZE

L'ispettrice Le Blanc è stata chiamata con urgenza a risolvere un caso dal contadino Mario: nel suo allevamento di 333 mucche, ci sono 2 mucche pazze. Le mucche sono disposte longitudinalmente e numerate da 1 a 333 da sinistra a destra. Le mucche sanno fare calcoli matematici. L'assistente Dirac ha deciso di assegnare loro un calcolo: ha ordinato a ogni mucca di dividere il numero di mucche alla propria sinistra per il numero di animali alla propria destra e moltiplicare il risultato per il proprio numero. Si sa che le mucche pazze non faranno questi calcoli: infatti agiranno per conto loro e al numero di mucche alla loro sinistra sottrarranno il numero di quelle disposte alla propria destra, divideranno il risultato per 2, moltiplicheranno l'ottenuto per 3 e sommeranno ancora 3 al risultato ottenuto da quest'ultimo calcolo (d'altronde sono pazze...). Dopo aver fatto fare il calcolo a tutte le mucche, Dirac è certo che i risultati errati faranno scoprire le mucche pazze, ma con sua enorme sorpresa tutti i risultati sono esatti! L'infalibile Le Blanc, accertato con il contadino che la mucca numero 1 non è pazza, sa già quali sono le mucche pazze.

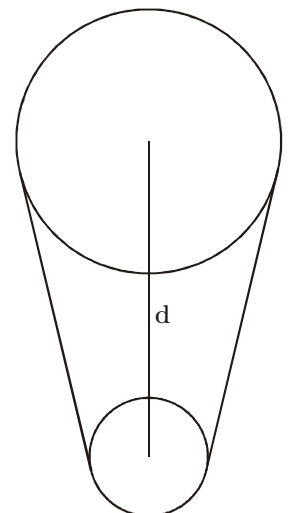
(Le diciture “destra” e “sinistra” si riferiscono al punto di vista della mucca. Dare come risultato la somma dei due numeri che contrassegnano le mucche pazze)

## 12. OROLOGI

L'orologio del bis-nonno di Dirac si è rotto. Per ripararlo Maurice deve costruire una cinghietta per mettere in rotazione due ingranaggi circolari di raggi rispettivamente 10 e 60 mm con i centri che distano 100mm l'uno dall'altro. Non riuscendo da solo a risolvere il problema chiede aiuto all'ispettrice Le Blanc. Quanto deve essere lunga in mm la cinghia?

## 13. TRUFFA AL LUNA PARK

Uno strano gioco sta affascinando i bambini al Luna Park. In un sacchetto ci sono tre palline di colore diverso. Chi scommette di riuscire ad estrarre in 9 prove successive solo palline di due diversi colori rimettendo ogni volta nel sacchetto la pallina estratta vincerà il quintuplo della scommessa. L'ispettrice Le Blanc, informata del gioco fa subito arrestare i criminali. Determinare la probabilità di vittoria del gioco. (N.B. L'estrazione di palline tutte dello stesso colore non fa vincere la scommessa) (Scrivere la somma tra numeratore e denominatore della frazione che rappresenta la probabilità cercata ridotta ai minimi termini.)



#### 14. UN MILIARDO DI MILIARDI

Una cassaforte è stata svaligiata alla Banca Nazionale di Parigi, e sul luogo del furto è stata lasciata una lettera indirizzata all'Ispeatrice di Polizia Le Blanc Anne Marie.

“All'età di vent'anni ho commesso il mio primo furto ed ho rubato  $10^{\frac{1}{10}}$  euro. A ventun anni ne ho rubati  $10^{\frac{3}{10}}$ , a ventidue  $10^{\frac{5}{10}}$  e così via. Oggi ne ho rubati  $10^{\frac{2n+1}{10}}$  ed ho raggiunto il mio obiettivo: per il primo anno, moltiplicando fra loro questi numeri il risultato è maggiore di un miliardo di miliardi. Firmata Zeno Koseno”. Qual è l'età del perfido Zeno?

#### 15. CONGEGNI D'ALLARME

Zeno Koseno deve disattivare un complicato sistema d'allarme messo a punto dall'ingegnoso Dirac a protezione del preziosissimo Formulario di Trigonometria rilegato in oro. Il sistema d'allarme è un congegno elettronico a forma di cubo formato da 27 cubetti di spigolo 1 cm. Il centro di ogni cubetto è collegato con un filo al centro di tutti gli altri cubetti. I fili che disattivano l'allarme sono lunghi esattamente 3 cm. Quanti fili deve tagliare Zeno Koseno per poter compiere indisturbato il furto?

#### 16. CATTURIAMO ZENO KOSENO

Ore 10.00 del mattino. Con la posta del mattino viene recapitata alla centrale di polizia una cartolina raffigurante la mappa della città di Parigi. L'Ispeatrice Le Blanc nota subito che la città è stata quadrettata con un griglia numerata da 1 a 50 sull'asse delle x e altrettanto sull'asse delle y. Sul retro un messaggio di sfida: “Se mi vuoi catturare sarò nel mio covo  $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$  per tutto il giorno, dove x e y sono entrambi interi positivi.” Dove si trova Zeno? (Dare come risposta 2 cifre per la coordinata x e 2 cifre per la coordinata y. es. Se la soluzione è (12;3) rispondere 1203)

#### 17. L'ENIGMA IRRISOLTO

Nell'ultimo covo scoperto, l'ispeatrice Le Blanc ha trovato una rivista dove Zeno ha evidenziato un enigma. “Tre prati, dove l'erba ha raggiunto la medesima altezza e seguirà a crescere uniformemente (cioè proporzionalmente al tempo, in uno stesso rapporto nei tre prati) hanno superficie rispettivamente di 60, 72 e 96 are. All'alba di uno stesso giorno si portano a pascolare nel primo prato 75 buoi, nel secondo 81 buoi e nel terzo un numero incognito di buoi. L'erba del primo e del secondo prato basta a nutrire i buoi che vi pascolano per 12 e 15 giorni rispettivamente. Quanti buoi sono stati portati a pascolare nel terzo prato se l'erba di esso è bastata a nutrirli per 18 giorni.” Scarabocchiati a lato vi sono dei calcoli, e dei punti di domanda. “Evidentemente Zeno non è riuscito a risolvere l'enigma” - commenta il fido Maurice - “... e lei ispeatrice, lo saprebbe risolvere?”

#### 18. LA CASSAFORTE

Le Blanc deve aprire una cassaforte per recuperare dei documenti della massima riservatezza trafugati dal Ministero degli Affari Importanti. Il codice della cassaforte corrisponde al massimo numero di interi che si possono scegliere tra 1 e 2010 (estremi inclusi) con la seguente proprietà: la somma di due qualsiasi dei numeri scelti non deve essere divisibile per 7. Qual è il codice della cassaforte?

#### 19. LA PASSWORD

I documenti segreti recuperati sono contenuti in un portatile protetto da password. Per fortuna che nella borsa ci sono vari foglietti con delle strane equazioni.

Il primo bigliettino riporta l'equazione:  $x^3 + y^3 = z^3$ ; il secondo l'equazione  $x^3 + y^3 = z^4$ ; il terzo:  $x + y + z < \text{possibile}$ ; il quarto:  $x \neq y$ ;  $x \neq z$ ;  $y \neq z$ ; il quinto:  $x, y, z > 0$ .

Le Blanc sorride perché sa benissimo che la prima equazione è impossibile e capisce che si tratta di un falso indizio. Le tracce spiegano che bisogna trovare tre numeri interi positivi e distinti che soddisfano l'equazione del secondo bigliettino con la condizione che la somma dei tre numeri sia la più piccola possibile. Sapresti aiutarla? (Riportare come soluzione la somma dei tre numeri trovati.)

#### 20. DODECAEDRI

I documenti segreti conducono Le Blanc in un covo nascosto nei sotterranei di Parigi dove trova una serie di calendari da tavolo a forma di dodecaedri regolari ciascuno diverso dagli altri per la disposizione dei mesi sulle dodici facce pentagonali. “Bel passatempo ha trovato Zeno” esclama Dirac alla vista dei numerosi dodecaedri presenti nel covo. “Quanti diversi ne avrebbe potuti costruire se non lo avessimo interrotto, Maurice?” (Se il numero è maggiore di 9999 riportare le ultime 4 cifre)