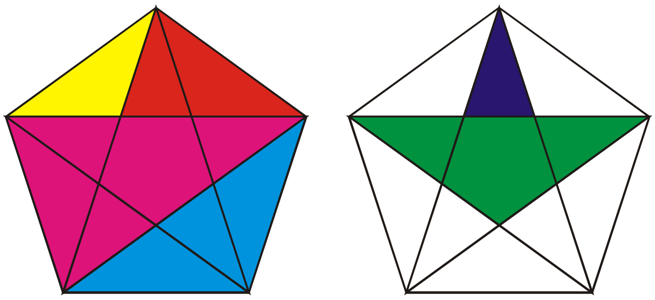
SIMULAZIONE GARA A SQUADRE ON-LINE (2/3/2009)

A cura di
Sandro Campigotto
Santina De Monte
Laura Candotti
Roberta Corisello
Enrico Munini
Carlo Cassola

1. IL PENTACOLO

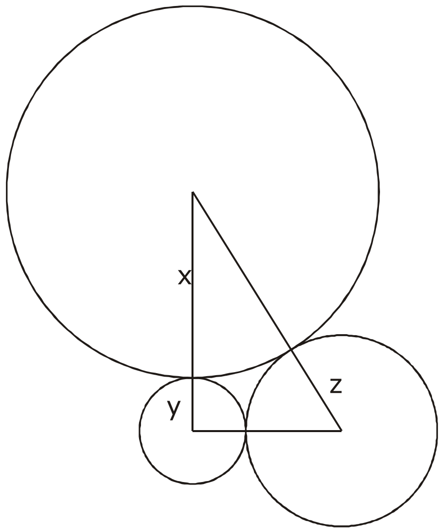
Vi sono 6 diversi tipi di triangoli, ciascuno deve essere contato 5 volte, uno (quello arancione) 10.
In totale vi sono 35 triangoli



2. IL COMPLICE

Rappresentando il problema come in figura, e chiamando x, y e z i raggi delle tre circonferenze, la soluzione è data dal seguente sistema:

$$\begin{cases} y+z=28 \\ x+y=45 \\ x+z=\sqrt{45^2+28^2} \end{cases}$$



Che ha per soluzione

$$\begin{cases} x=35 \\ y=18 \\ z=10 \end{cases}$$

Da cui 35 la soluzione del problema.

3. FURTI AL LOUVRE

Troviamo tutte le terne di interi (a; b; c) che soddisfano la proprietà indicata.

Se a=2, allora $b^c < 11$ perché $2^{11} = 2048 > 2009$. Quindi le terne possibili sono in tal caso (2; 2; 2), (2; 2; 3), (2; 3; 2).

Se a =3, notiamo che $3^7 = 2187 > 2009$, quindi l'unica terna è in tal caso (3; 2; 2).

Se a =4, notiamo che $4^6 = 4096 > 2009$, quindi l'unica terna è in tal caso (4; 2; 2).

Se a =5, notiamo che $5^5 = 3125 > 2009$, quindi l'unica terna è in tal caso (5; 2; 2).

Se a =6, notiamo che $6^5 = 7776 > 2009$, quindi l'unica terna è in tal caso (6; 2; 2).

Se a =7, notiamo che $7^4 = 2401 > 2009$, quindi non vi è alcuna terna del tipo (7; b; c) che soddisfa la proprietà indicata.

L'ultimo reperto risale al 622.

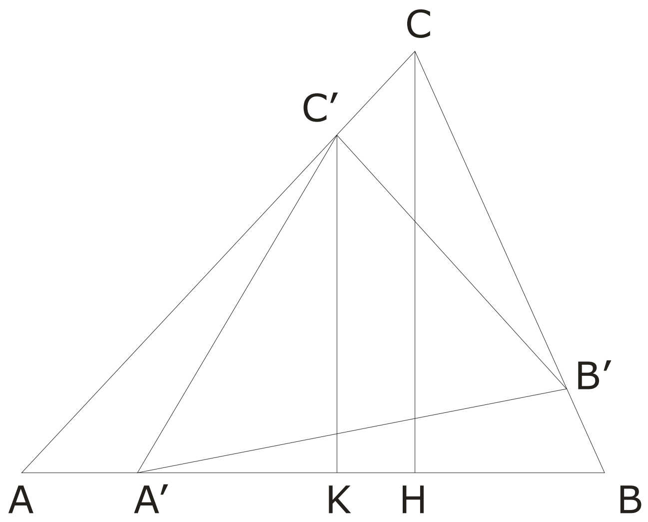
4. VERBALE

Avendo a disposizione 30 euro potrei comprare
15 colombi con resto 0€ (<30 uccelli)
14 colombi con resto 2€ per 6 piccioni (< 30 uccelli)
13 colombi con resto 4€ per 12 piccioni (<30 uccelli)
12 colombi con resto 6 € per 18 piccioni (=30 uccelli ma nessuna tortora)
11 colombi con resto 8 euro. Con 5€ compro 10 tortore e i restanti 3 per 9 piccioni =30 uccelli

11colobi 10 tortore e 9 piccioni sono la soluzione cercata

11x10x9=990

5. CONTRABBANDO



L'area del triangolo ABC è $S = \frac{AB \cdot CH}{2}$, l'area del triangolo AA'C' sarà $S_1 = \frac{AA' \cdot C'K}{2}$ sappiamo che $AA' = \frac{1}{n}AB$ mentre $C'K = \frac{n-1}{n}CH$ in quanto i triangoli AC'K e ACH sono simili e $AC' = \frac{n-1}{n}AC$.

Perciò sostituendo si ottiene: $S_1 = \frac{n-1}{n^2}S$.

Discorso analogo per gli altri due triangoli. L'area del triangolo piccolo sarà data dalla differenza tra $S - 3S_1 = S\left(1 - \frac{3(n-1)}{n^2}\right)$.

Per n = 5 l'area di A'B'C' $= \frac{13}{25}S$ e quindi il rapporto tra le aree è $\frac{13}{25}$, la risposta è 1325.

6. LA COMBINAZIONE

Se 9 fosse la prima cifra, le altre cifre dovrebbero essere tutte 0. Avremo così uno zero in posizione 9 (contraddizione).

Se la prima cifra fosse 8 devono comparire 8 zeri ed un 1 in posizione 8; ma in posizione 1 c'è uno zero e quindi un 1 non potrebbe comparire in posizione 8 (contraddizione).

Se scriviamo un 7 in prima posizione, ci saranno 7 zeri all'interno del numero ed un 1 in posizione 7. A questo punto dovremmo scrivere un 1 in posizione 1. così facendo avremmo 2 cifre 1 presenti nel numero, dunque dovremmo scrivere 2 in posizione 1. Avremmo così solo 6 zeri (contraddizione).

Partendo invece con un 6 e ragionando esattamente come prima scriveremo 6.210.001.000 la soluzione del problema.

La risposta è quindi 6210

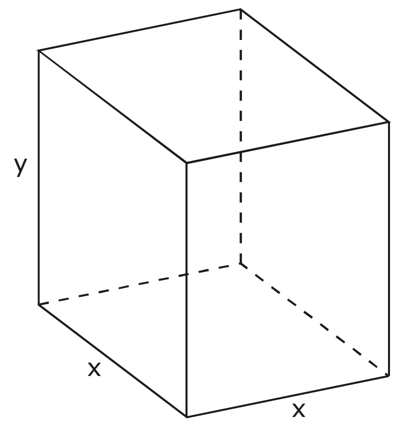
7. BUGIE

All'n-esimo incrocio l'auto e lo scuolabus saranno separate da $x_n = x_{n-1} + 2(x_{n-1} + 1) = 3x_{n-1} + 2$ automobili, dove x_{n-1} è il numero delle auto che le separava all'incrocio $n-1$ e $x_0 = 0$.

Il generico termine è quindi dato da $x_n = 3^n - 1$ che per $n = 7$ ci da la soluzione:

$x_7 = 3^7 - 1 = 2186$

8. IL REGALO



Chiamando x lo spigolo di base e y l'altezza, il problema può essere scritto:

$x^2 y = 2x^2 + 4xy$, semplificando per x

$xy = 2x + 4y$

Mettendo in evidenza y otteniamo

$$y = \frac{2x}{x-4} = \frac{2x-8+8}{x-4} = 2 + \frac{8}{x-4}$$

Ora $x-4$ deve dividere 8, quindi abbiamo solo 4 possibilità:

$$x-4=1 \;\rightarrow\; x=5 \;\rightarrow\; y=10 \;\rightarrow\; V=250$$
$$x-4=2 \;\rightarrow\; x=6 \;\rightarrow\; y=6 \;\rightarrow\; V=216$$
$$x-4=4 \;\rightarrow\; x=8 \;\rightarrow\; y=4 \;\rightarrow\; V=256$$
$$x-4=8 \;\rightarrow\; x=12 \;\rightarrow\; y=3 \;\rightarrow\; V=432$$

L'ultimo caso è la soluzione del problema

9. COMPLEANNI

La soluzione è 127;
le età infatti sono 12, 48 e 67 (6 cifre diverse). Il prossimo anno e così pure il seguente saranno ancora 6 cifre diverse (13,49,68 e 14,50,69); a questo punto tutte le cifre sono state utilizzate.
L'anno successivo (15/51/70) servono due set di candeline perché si ripetono l'1 il 5.

10. PROBABILITÀ E INDIZI

se il Dirac ottiene 1 ha già perso = $\frac{1}{6} \cdot 0$

se il Dirac ottiene 2 Le Blanc deve fare un numero <= a 2 (1/6 per 1/36) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36}$

se il Dirac ottiene 3 Le Blanc deve fare un numero <= a 3 (1/6 per 3/36) $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{36}$

se il Dirac ottiene 4 Le Blanc deve fare un numero <= a 4 (1/6 per 6/36) $\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{36}$

se il Dirac ottiene 5 Le Blanc deve fare un numero <= a 5 (1/6 per 10/36) $\frac{1}{6} \cdot \frac{10}{36}$

se il Dirac ottiene 6 Le Blanc deve fare un numero <= a 6 (1/6 per 15/36) $\frac{1}{6} \cdot \frac{15}{36}$

la somma dei valori è $\frac{35}{216}$

11. MUCCHE PAZZE

Si tratta di risolvere l'equazione

$$\frac{333-x}{x-1}x = \frac{(333-x)-(x-1)}{2}3+3$$

ovvero, semplificando i calcoli

$$x^2 - 87x + 252 = 0$$

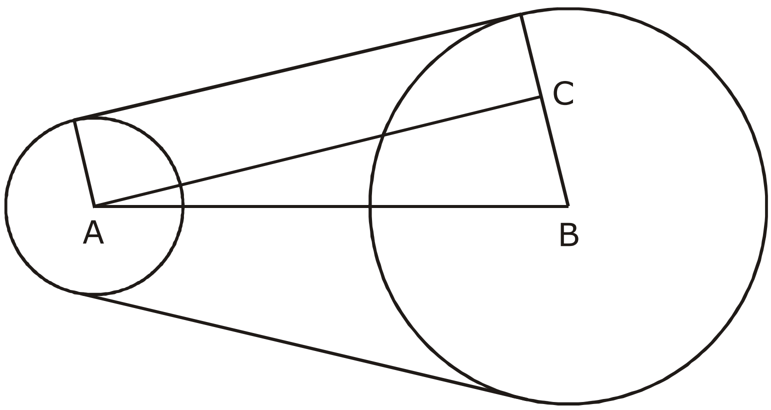
che si può scomporre come

$$(x-84)(x-3) = 0$$

Le mucche pazze sono quindi la n. 3 e la numero 84.

La soluzione è quindi 87.

12. OROLOGI



Il triangolo ABC è rettangolo in C, l'ipotenusa AB vale 100, mentre CB = 60 – 10 = 50. Perciò l'angolo in B è 60°. Applicando le regole dei triangoli 30, 60, 90 $AC = 50\sqrt{3}$. La cinghia è quindi composta da due segmenti che valgono complessivamente $100\sqrt{3}$, un terzo della circonferenza piccola ($\frac{2\pi \cdot 10}{3}$) e due terzi di quella grande ($\frac{2\pi \cdot 60 \cdot 2}{3}$). La somma delle tre lunghezze mi dà: $\frac{20\pi \cdot 13}{3} + 100\sqrt{3}$ il cui valore troncato all'intero è: 445.

13. TRUFFA AL LUNA PARK

Fissati due dei tre colori, in ogni estrazione potrò avere una probabilità pari a $\frac{2}{3}$ di estrarre una pallina di uno dei due colori. Quindi $\left(\frac{2}{3}\right)^9$ sarà la probabilità che l'evento si verifichi per 9 volte di seguito. Qui però sono anche contati i casi in cui la pallina estratta è sempre dello stesso colore perciò dovrò sottrarre $\left(\frac{1}{3}\right)^9$ per 2 perché due sono i possibili colori scelti. Ora basterà moltiplicare questa differenza per tutti i possibili modi di scegliere due colori avendone a disposizione 3 (3 modi) e avrò il risultato. $3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^9 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^9\right] = \frac{2^n - 2}{3^8} = \frac{510}{6561} = \frac{170}{2187}$.

La risposta è quindi 2357.

14. UN MILIARDO DI MILIARDI

Moltiplico tra loro i numeri dati: $10^{\frac{1}{10}} \cdot 10^{\frac{3}{10}} \cdot 10^{\frac{3}{10}} \cdot ... \cdot 10^{\frac{2n+1}{10}} > 10^{18}$, per le proprietà delle potenze ottengo: $10^{\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{5}{10}+...+\frac{2n+1}{10}} > 10^{18}$, quindi $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{5}{10}+...+\frac{2n+1}{10} > 18$, ossia $1+3+5+...+(2n+1) > 180$.

Sapendo che $1+3+5+...(2n+1) = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)^2$ si ottiene che $(n+1)^2 > 180$. Il primo quadrato maggiore di 180 è 196, quadrato di 14, perciò n sarà 13.

Ora è sufficiente sommare 20 per ottenere il risultato richiesto: 33

15. CONGEGNI D'ALLARME

Per le coppie di centri a distanza 3, il quadrato di tale distanza è 9. Introduciamo un sistema di riferimento con gli assi paralleli agli spigoli.

Per una coppia a distanza 3, si ha una soluzione intera dell'equazione $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 9$ dove Δx, Δy e Δz sono le differenze tra le coordinate dei centri dei cubetti: perciò deve essere $\Delta x \le 2$ $\Delta y \le 2$ e $\Delta z \le 2$. L'unica soluzione possibile è quindi (2; 2; 1) che corrisponde a una coppia di cubetti di cui uno è in un vertice e l'altro è al centro di uno dei 3 spigoli adiacenti al vertice opposto. Per ogni vertice del cubo, ci sono quindi 3 coppie a distanza 3: in tutto ci sono $8 \cdot 3 = 24$ coppie di cubetti a distanza 3.

16. CATTURIAMO ZENO KOSENO

Fattorizzando l'equazione si ottiene:

$$x(x+1) = y(y+1)(y^2+1)$$

i due numeri a sinistra dell'uguaglianza sono successivi, quindi sono primi tra loro, questo implica due dei tre fattori a destra dell'uguaglianza devono dare uno dei due fattori a sinistra:
valutiamo tutti i possibili casi:

1) $x = y \rightarrow y^2+1=1 \rightarrow y=0$ non accettabile

2) $x = y+1 \rightarrow (y+1)(y+2) = y(y+1)(y^2+1) \rightarrow y^3 = 2$ non accettabile;

3) $x = y^2+1 \rightarrow (y^2+1)(y^2+2) = y(y+1)(y^2+1) \rightarrow y = 2$ e quindi $x = 5$ LA SOLUZIONE;

4) $x = y(y+1) \rightarrow y(y+1)(y^2+y+1) = y(y+1)(y^2+1) \rightarrow y = 0$ non accettabile;

5) $x = y(y^2+1) \rightarrow y(y^2+1)(y^3+y+1) = y(y+1)(y^2+1) \rightarrow y = 0$ non accettabile;

6) $x = (y+1)(y^2+1) \rightarrow x+1 = y \rightarrow y^3+y^2+2 = 0$ che non ha soluzioni intere.

La soluzione è quindi 0502

17. L'ENIGMA IRRISOLTO

Rispondiamo prima di tutto a questa domanda: quanto mangia un bovino in un giorno?
Sia x il quantitativo di erba per ara e y il quantitativo di erba cresciuta per ara al giorno: dai dati del primo campo possiamo dire che 75 buoi in 12 giorni mangiano in tutto $60x + 60 \cdot 12y$ e quindi

1 bovino al giorno mangia $\dfrac{60x + 60 \cdot 12y}{75 \cdot 12} = \dfrac{x + 12y}{15}$

Analogamente dai dati del secondo prato ricaviamo che

1 bovino al giorno mangia $\dfrac{72x + 72 \cdot 15y}{81 \cdot 15}$

Uguagliando le due espressioni possiamo ricavare che $y = \dfrac{1}{12}x$

In un giorno, quindi, un bovino mangia $\dfrac{2x}{15}$

Utilizzando i dati del terzo prato, e chiamando b il numero incognito di buoi che pascolano, la soluzione del problema sarà data dall'equazione:

$$\frac{2}{15}x = \frac{96x + 96 \cdot 18 \cdot \frac{1}{12}x}{b \cdot 18}$$

Che risolta ci da $b = 100$.

18. LA CASSAFORTE

2010 diviso per 7 ha come risultato 287 con resto 1. Ci sono quindi 288 numeri che divisi per 7 hanno resto 1 e 6 serie di 287 numeri che divisi per 7 hanno resto rispettivamente 0, 2, 3, 4, 5, 6.
Sceglieremo quindi i 288 numeri che divisi per 7 hanno resto 1 (e così escludiamo tutti quelli che divisi per 7 hanno resto 6), altre due serie di 287 numeri (per esempio quelli con resto 2 e 3, escludendo quelli con resto 5 e 4) e un numero divisibile esattamente per 7.
In totale 288+287+287+1=863

19. LA PASSWORD

Se dividiamo l'equazione: $x^3 + y^3 = z^4$ per z^3 otteniamo

$$\left(\frac{x}{z}\right)^3 + \left(\frac{y}{z}\right)^3 = z \qquad (*)$$

Poniamo $\dfrac{x}{z} = 2$ e $\dfrac{y}{z} = 3$ e sostituiamo nella (*): $2^3 + 3^3 = z$ ovvero $z = 35$.

Quindi $\dfrac{x}{35} = 2$ e $\dfrac{y}{35} = 3$ da cui $x = 70$ e $y = 105$

La somma dei tre numeri risulterà quindi pari a 210.

20. DODECAEDRI

Prima soluzione.

Scegliamo una qualsiasi faccia per Gennaio. Ci sono $\binom{11}{5}$ modi di scegliere i mesi da inserire nell'anello di cinque facce adiacenti a Gennaio e $4!$ modi diversi di disporli. C'è un altro anello di cinque facce ciascuna delle quali adiacente a due delle facce vicine a Gennaio; i mesi, per queste cinque facce, possono essere scelti in $\binom{6}{5}$ modi e ci sono $5!$ differenti modi di disporli relativamente al primo anello.

Il mese, per la faccia opposta a quella di Gennaio, è ora univocamente determinato. In totale abbiamo:

$$\binom{11}{5} \cdot 4! \cdot \binom{6}{5} \cdot 5! = \frac{11!}{5} = 7.983.360$$

Seconda soluzione.

Ci sono 12! modi di disporre i mesi sulle facce del dodecaedro. Ciascuna di queste configurazioni può essere trasformata in un'altra tramite una trasformazione rigida del dodecaedro in sé stesso. Queste trasformazioni trasportano vertici in vertici e sono univocamente determinate specificando l'immagine di due facce adiacenti.

La prima faccia ha dodici possibili immagini; determinata la prima la vicina ha cinque possibili immagini. Perciò ci sono $60 = 12 \cdot 5$ simmetrie del dodecaedro e ciascuna delle 12! configurazioni è uguale ad altre 60 (compresa sé stessa). Il valore cercato è quindi:

$$\frac{12!}{60} = \frac{11!}{5} = 7.983.360$$