SOLUZIONI ALLENAMENTO GARA A SQUADRE SCUOLE MEDIE (23/4/2010)

1. NUMERI MAGICI [385]
Asterix ha trovato una vecchia pergamena con scritti 7 numeri magici:

7, 13, 25, 49, 97, 193, …?!?

Qual è l'ultimo numero magico che purtroppo non si riesce più a leggere?

Soluzione:
Analizzando la sequenza di numeri si può scoprire che:
13-7=6
25-13=12
49-25=24
…
Oppure che il successivo è il doppio del precedente meno uno
$x_{n+1} = 2x_n - 1$

Oppure che togliendo 1 a tutti i numeri
6-12-24-48-96-192

Si viene a creare una sequenza in cui i numeri sono il doppio del precedente.

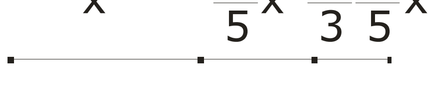
In ogni caso si trova che il numero successivo è 385.

2. AFFARI [24]
Beniamina, moglie del capo villaggio Abraracourcix, si è data agli affari ed una giornata ha venduto 13 Kg di pasticcini, 18 scatole di cioccolatini e 12 torte incassando in tutto 960 sesterzi. Se da ogni scatola di cioccolatini ricava 26 sesterzi e da ogni torta 15 sesterzi, quanti sesterzi ha ricavato da ogni kg. di pasticcini?

Soluzione:
Il ricavo per le torte è di 12 x 15 = 180 sesterzi.
Il ricavo per i cioccolatini è di 18 x 26 = 468 sesterzi
Il ricavo per i 13 Kg di pasticcini è quindi 960-468-180=312 che diviso per 13 da esattamente 24 sesterzi.

3. IDEFIX MESSAGGERO [25]
Idefix deve consegnare un importante messaggio ad Asterix, per farlo deve percorrere in tre giorni una strada lunga 50 km. Nel secondo giorno percorre i 3/5 della strada percorsa il primo giorno e nel terzo giorno i 2/3 della strada percorsa il secondo giorno. Quanti km. ha percorso Idefix nel primo giorno ?

Soluzione:



Chiamando x il tratto percorso il primo giorno, risulta essere di $\frac{3}{5}x$ il tratto percorso il secondo giorno e di $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$ il tratto del terzo giorno.
Si osserva che il primo giorno Idefix ha percorso esattamente la metà della strada, pari quindi a 25 km.

4. LA SCUOLA DEL VILLAGGIO [39]
Durante un giorno di scuola la maestra ha proposto alla classe il seguente gioco: bisogna contare tutti assieme da 1 a 100 ed applaudire ogni volta che si incontra o un multiplo di 3 o un numero che termina per tre. Al termine del gioco quanti saranno stati gli applausi?

Soluzione:
Di numeri divisibili per 3 ce ne sono esattamente un terzo, quindi 100:3=33
Di numeri che finiscono per 3 ce ne sono 10, di questi, però 3,33,63 e 93 sono già stati contati, quindi al termine del gioco ci saranno stati 33+6=39 applausi.

5. PROBLEMI D'ETÀ! [30]
Oceanonix oggi ha 30 anni e suo figlio Menabotte ne ha 10. Fra quanti anni avranno 100 anni fra tutti e due?

Soluzione:
Se oggi Oceanonix ha 30 anni e suo figlio Menabotte ne ha 10, restano 60 anni da dividere per due affincheè la loro sommo sia esattamente 100. La risposta è quindi 30 anni.

6. I FAGIANI DI GIULIO CESARE [90]
Il cuoco di Giulio Cesare ha messo su un allevamento di fagiani e di conigli ben fornito, per essere in grado di accogliere gli ospiti del grande Giulio. In questo momento vi sono in tutto 220 zampe e 100 teste. Quanti sono i fagiani?

Soluzione:
togliendo 100+100 (tutti gli animali hanno almeno 2 zampe) a 220, restano 20 zampe da distribuire ai conigli (che hanno 4 zampe). I conogli sono quindi 10 e i fagiani 90.

7. EREDITÀ [120]
Un legato romano morto in battaglia ha lasciato ai suoi tre figli una bella eredità. Il primo erede ha preso i 3/5, il secondo 1/4 e il terzo ha preso il rimanente, cioè 18.000 sesterzi. A quante migliaia di sesterzi ammontava l'eredità?

Soluzione:

Il primo figlio più il secondo figlio hanno preso in totale $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{12+5}{20}=\frac{17}{20}$ dell'eredità.

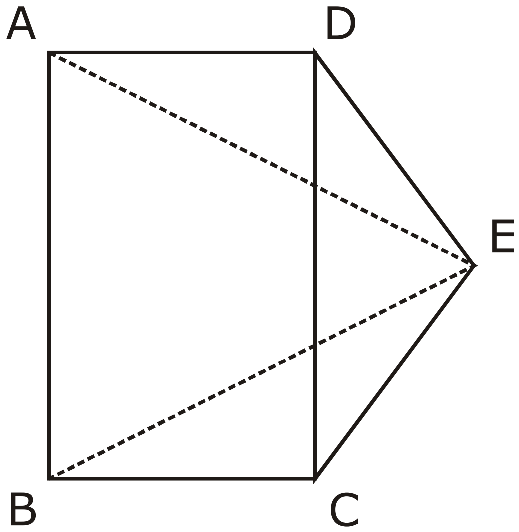
Il terzo figlio ha quindi avuto i $\frac{3}{20}$.

Ora $\frac{3}{20}:18.000=1:x$

$$x=\frac{18.000}{\frac{3}{20}}=18.000\cdot\frac{20}{3}=120.000$$

8. LA PALIZZATA [40]
Il villaggio di Asterix è protetto da una palizzata con la forma mostrata in figura formata da un rettangolo e da un triangolo isoscele i cui angoli uguali misurano 50°. Sapendo che i lati opposti AD e BC del rettangolo sono uguali ai lati DE ed EC del triangolo, quanti gradi misura l'angolo AEB?

Soluzione:



Tracciando l'angolo $A\hat{E}B$ cercato si osserva che il triangolo ADE è isoscele per costruzione, quindi:
$A\hat{D}E = A\hat{D}C + C\hat{D}E = 90° + 50° = 140°$
Questo implica che $D\hat{E}A = (180° - 140°) : 2 = 20°$
Da cui segue che $A\hat{E}B = D\hat{E}C - 2 \cdot D\hat{E}A = 180° - 2 \cdot C\hat{D}E - 2 \cdot D\hat{E}A = 180° - 2 \cdot 50° - 2 \cdot 20° = 40°$

9. LE DUE TESTUGGINI [19]
Questa volta i due comandanti di Cesare sono convinti di farcela e hanno disposto gli uomini delle loro legioni in due testuggini perfettamente quadrate per affrontare i Galli in battaglia. Gli effettivi delle due legioni differiscono di 217 uomini e la legione più numerosa ha sette file più dell'altra. Quante file compongono la testuggine più grande ?

Soluzione:

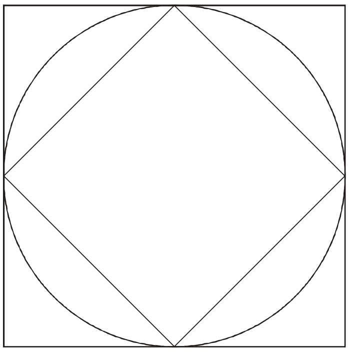
Indicando con x il numero di file della legione più numerosa e con y quelli dell'altra, i dati del problema possono essere scritti sotto forma di equazioni:

$x^2 = 217 + y^2$
$x = y + 7$

Sostituendo la seconda nella prima si ottiene:

$y^2 + 14y + 49 = 217 + y^2$
Da cui segue che
$y = \frac{217 - 49}{14} = 12$
$x = 19$

10. IL FREGIO [384]
Abraracourcix ha chiesto al fabbro del villaggio di incidere sul suo scudo da cerimonia un fregio costituito da un quadrato, nel quale è inscritto un cerchio, nel quale è inscritto un quadrato, nel quale è inscritto un cerchio, e così via. In totale nel fregio compaiono 15 quadrati, dei quali il più piccolo ha il lato lungo 3 mm. Quanti mm misura il lato del quadrato più grande?



Soluzione:
Osserviamo che legame c'è tra i primi due quadrati.
Sia l_1 il lato del primo quadrato e sia l_2 il alto del secondo.
Disegnando opportunamente il quadrato (vedi figura), si osserva che

$$l_2 = \frac{l_1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Ripetendo il ragionamento per ogni quadrato interno, si avrà che

$$l_3 = \frac{l_2}{2} \cdot \sqrt{2} = l_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Procedendo di questo passo, si avrà che

$$l_{15} = l_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{14} = l_1 \cdot \frac{2^7}{2^{14}} = \frac{l_1}{2^7}$$

Ma sappiamo che $l_{15} = 3\,mm$
Quindi
$l_1 = l_{15} \cdot 2^7 = 3 \cdot 2^7 = 384\,mm$

11. I KOALA [120]
Il centurione Caius Bonus ha regalato alla sua amata figlioletta una famiglia di Koala. Il piccolo koala mangia le foglie di un intero albero di eucalipto in 10 ore. Se, sia il padre che la madre del piccolo koala mangiano due volte più veloci di lui, in quanti minuti i tre koala insieme riuscirebbero a mangiare tutte le foglie dello stesso albero di eucalipto?

Soluzione:

Baby Koala mangia un albero in 10 ore, mentre mamma e papà koala, ciascuno, lo finiscono in 5 ore.
Questo vuol dire che in 10 ore i tre familiare mangerebbero esattamente 5 alberi di eucalipto.
Un albero verrebbe terminato dai tre in $\frac{10}{5} = 2\,ore$ che sono 120 minuti.

12. LE CILIEGE DI PANORAMIX [24]
Panoramix mentre girovagava fuori dal villaggio in cerca di piante rare per le sue pozioni ha trovato un bell'albero di ciliegie e ha portato al villaggio un cesto con 120 ciliegie per i tre nipoti, Golosix di 4 anni, Studiosix di 7 anni, Dispettix di 9 anni. Le ha distribuite secondo questo criterio: a ciascun nipote ha dato un numero di ciliegie ottenuto moltiplicando l'età del nipote per un certo fattore e questo fattore è lo stesso per tutti e tre i nipoti. Quante ciliegie spettano a Golosix?

Soluzione:
Sia x il fattore moltiplicativo usato da Panoramix.
Golosix riceve $4x$ ciliegie, Studiosix $7x$ e Dispettix $9x$.
In totale Panoramix distribuisce $20x$ ciliegie, pari a 120.

$$x = \frac{120}{20} = 6$$

Golosix riceve $6 \cdot 4 = 24$ ciliegie.

13. VIAVAI DI CARRETTI [13]
Oggi dal centro del villaggio ogni minuto parte un carretto che in 7 minuti arriva alla porta principale, qui si ferma un istante e poi ritorna indietro (consideriamo trascurabile il tempo della fermata). Un carretto che va dal centro alla porta principale e ritorno, quanti altri carretti incontrerà ?

Soluzione:
Il numero di carretti che fa il tragitto è di 14, visto che ne parte uno ogni minuto.
Andando e tornando dovremo incrociare tutti gli altri carretti. La risposta è quindi 13.

14. CINGHIALE IN FUGA! [8]
Un cinghiale in fuga dalle grinfie di Obelix sale una strada di montagna alla velocità di 12 Km/h, purtroppo in cima incontra Asterix e allora immediatamente ridiscende lungo la stessa strada alla velocità di 20 Km/h ...!!! La differenza tra il tempo di salita e quello di discesa è di 16 minuti. Qual è la lunghezza in Km del percorso compiuto in salita dal povero cinghiale?

Soluzione:
Per risolvere il problema è necessario ricordare che il legame tra spazio percorso (s), la velocità (v) e il tempo (t) è data dalla relazione $s = v \cdot t$

Scriviamo le due equazioni legate al percorso di andata e ritorno del cinghiale:

andata: $s = 12\dfrac{km}{h} \cdot t$

ritorno: $s = 20\dfrac{km}{h} \cdot (t - 16\,\text{min})$

per comodità esprimiamo tutti i tempi in minuti, quindi è necessario convertire l'unità di misura della velocità:

andata: $s = 12\dfrac{km}{60\,\text{min}} \cdot t = \dfrac{1}{5}\dfrac{km}{\text{min}} \cdot t$

ritorno: $s = 20\dfrac{km}{60\,\text{min}} \cdot (t - 16\,\text{min}) = \dfrac{1}{3}\dfrac{km}{\text{min}} \cdot (t - 16\,\text{min})$

ora lo spazio percorso è uguale, quindi possiamo scrivere che

$\dfrac{1}{5} \cdot t = \dfrac{1}{3} \cdot (t - 16\,\text{min})$ da cui segue che

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot t = 16\,\text{min}$$

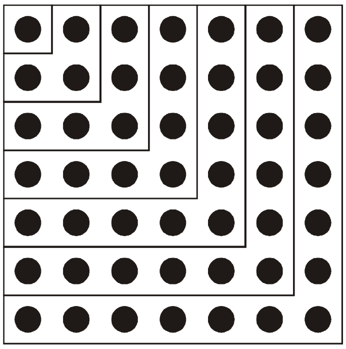
$$t = 40\,\text{min}$$

Sostituendo il volore trovato nell'equazione dell'andata, scopriamo che

$$s = \frac{1}{5}\frac{km}{\text{min}} \cdot 40\,\text{min} = 8\,km$$

15. LE PERLE DI FALBALÀ [2500]
Obelix, sempre più follemente innamorato di Falbalà, ha fatto una incursione all'accampamento di Laudanum rubando alla moglie del legato romano una scatola piena di perle e tornato al villaggio regala alla avvenente Falbalà tutte le perle! Quante perle ha donato Obelix a Falbalà se il numero totale delle perle nella scatola era uguale alla somma dei primi 50 numeri naturali dispari?

Soluzione:



Osservando la figura è possibile scoprire la regola che governa la somma dei primi n numeri dispari:

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

…

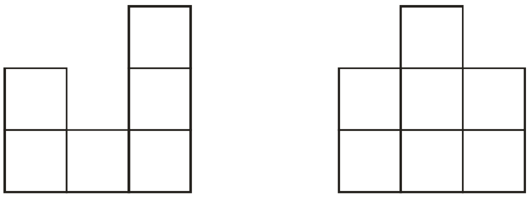
In generale

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$

Nel nostro caso:

$1 + 3 + 5 + ... + (2 \cdot 50 - 1) = 50^2 = 2500$

16. MATUSALEMIX COMPIE CENTO ANNI [0816]
Grande festa al villaggio per i cento anni di Matusalemix. Beniamina ieri ha preparato una torta a forma di cubo composta accostando 27 cubetti di marzapane, ma ora è sconcertata qualcuno di nascosto ha già mangiato parte della torta! Qui sotto vedete la vista da sinistra e frontale della torta rimasta. Quanti cubetti sono rimasti? Determinate il numero minimo ed il numero massimo di cubetti compatibili con le raffigurazioni mostrate (e ricordarsi che la torta deve stare in piedi!) Nella risposta utilizzare i 2 numeri di sinistra per il minimo ed i 2 numeri di destra per il massimo, ad esempio se la risposta fosse 5 e 9 scrivere 0509.



Soluzione:

2			
3			
2			
	2	1	3

dopo aver riportato su un quadrato le informazioni ricavate dalla vista frontale e da quella laterale si può riempire la griglia cercando di ottenere le altezze richieste utilizzando il minimo e il massimo numero di cubetti possibile:

Caso minimo (8 cubetti):

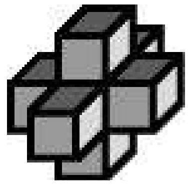
2			2
3			3
2	2	1	
	2	1	3

Caso massimo (16 cubetti)

2	2	1	2
3	2	1	3
2	2	1	2
	2	1	3

17. IL TALISMANO [105]

Panoramix costruisce un talismano incollando fra loro sette dadi in base alla regola seguente: incollare fra loro due facce che abbiano lo stesso numero. Mentre gioca con il suo capolavoro, questo gli scivola dentro un secchio contenente vernice bianca. Estratto il talismano, Panoramix si accorge che tutti i numeri sono scomparsi. A quanto ammontava la somma di tutti i numeri sulla superficie del talismano?



Soluzione:

In totale dobbiamo prendere in considerazione 6 dadi, ciascuno privato di un faccia. Dal punto di vista del calcolo è come se ci fossero esattamente 5 dadi completi.
Siccome ogni dado ha come somma delle facce opposte 7, il valore totale dei punti è
$5 \cdot 7 \cdot 3 = 105$

18. IL PALLONE [20]

Durante una tregua i romani hanno sfidato i galli ad una partita a calcio ed hanno perso. Il pallone è stato cucito con pezzi di cuoio a forma di pentagono regolare o esagono regolare. Ogni pentagono è circondato da 5 esagoni e ogni esagono è circondato da 3 pentagoni e da 3 esagoni. Il pallone ha 12 pentagoni. Quanti esagoni deve avere?

Soluzione:

Ragioniamo sulle cuciture:
Ogni pentagono è collegato ad un esagono, quindi il numero delle cuciture con gli esagoni è 12 x 5.
Ogni esagono è collegato a 2 pentagoni, quindi le cuciture con i pentagoni dovranno essere Numero degli esagoni x 3. I due numeri devono essere uguali, perché non ci sono altre possibili cuciture tra esagoni e pentagoni.

$$esagoni = \frac{12 \cdot 5}{3} = 20$$

19. LETTERE DA DRUIDI! [0416]

Panoramix ha ricevuto una lettera da un suo vecchio e caro amico druido che purtroppo non vede da molti anni. Tra le altre cose il vecchio amico gli ha scritto che ha avuto alcuni figli il prodotto delle età dei quali (in anni) vale 18304 e che il figlio minore ha la metà degli anni del figlio maggiore e per finire che non ha mai avuto gemelli. Quanti sono i figli dell'amico di Panoramix? Nella risposta usare le prime due cifre per il numero di figli, le altre due cifre per l'età del figlio maggiore.

Soluzione:

Esaminiamo, prima di tutto il numero 18304 eseguendo la fattorizzazione:

$$\begin{array}{r|r}
18304 & 2 \\
9152 & 2 \\
4576 & 2 \\
2288 & 2 \\
1144 & 2 \\
572 & 2 \\
286 & 2 \\
143 & 11 \\
13 & 13 \\
1 &
\end{array}$$

$18304 = 2^7 \cdot 11 \cdot 13$

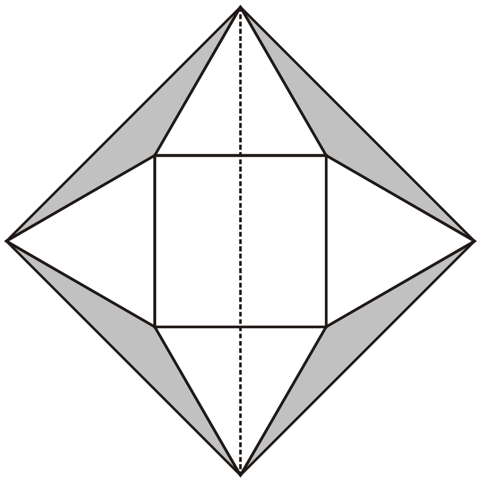
Ma il più grande il doppi degli anni del più piccolo, quindi dovremo avere che il più grande ha più di 13 anni e per rispettare i vincoli, dovrà accadere che:

$F_1 = 2^3 < F_2 = 11 < F_3 = 13 < F_4 = 2^4$

Il vecchio Druido ha 4 figli, di età 9, 11,13 e 16 anni.

20. IL GIARDINO DI BENIAMINA [625]

Beniamina ha appena finito di sistemare il grande giardino dietro casa. Partendo da un'aiuola di quadrata di area $625\,m^2$, seminata a rose, ha aggiunto 4 aiuole a forma di triangolo equilatero, dove ha seminato tulipani, quindi ha unito i vertici dei triangoli e ha seminato margherite nello spazio rappresentato in grigio in figura. Qual è la superficie seminata a margherite in m^2?



Soluzione:

Tracciando la diagonale del quadrato più grande si può notare che la sua misura è data dalla misura del lato del quadrato piccolo più 2 altezze del triangolo equilatero.

L'area delle 4 zone grigie le possiamo quindi calcolare per differenza:

$$A_{4-tringoli} = A_{QuadratoGrande} - 4 \cdot A_{TriangoloEquilatero} - A_{QuadratoPiccolo}$$

Sia x la misura del lato del quadrato piccolo; sappiamo che $A_{QuadratoPiccolo} = x^2 = 625$.

$$A_{QuadratoGrande} = \frac{\left(x + 2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{3}\right)^2}{2} = \frac{(x + x\sqrt{3})^2}{2} = \frac{x^2(1+\sqrt{3})^2}{2} = \frac{x^2(1+3+2\sqrt{3})}{2} = x^2(2+\sqrt{3})$$

$$A_{TriangoloEquilatero} = \frac{x \cdot \frac{x}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

Quindi

$$A_{4-tringoli} = x^2(2+\sqrt{3}) - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - x^2 = 2x^2 + \sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}x^2 - x^2 = x^2$$

L'area richiesta è quindi $625\,m^2$.